

Zesz. Nauk. UEK, 2023, 3(1001): 145–160
ISSN 1898-6447
e-ISSN 2545-3238
<https://doi.org/10.15678/ZNUEK.2023.1001.0308>

O testowaniu istotności różnic w strukturach populacji na podstawie prób o małych liczebnościach

On Testing the Significance of Differences in Population Structures Based on Small Sample Sizes

Grzegorz Kończak¹, Martyna Kosińska²

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki, ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, e-mail: grzegorz.konczak@ue.katowice.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4696-8215>

² Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki, ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, e-mail: martyna.kosinska@ue.katowice.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5430-227X>

Artykuł udostępniany na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 (CC BY 4.0);
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Sugerowane cytowanie: Kończak G., Kosińska M. (2023), *O testowaniu istotności różnic w strukturach populacji na podstawie prób o małych liczebnościach*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 3(1001), 145–160, <https://doi.org/10.15678/ZNUEK.2023.1001.0308>.

STRESZCZENIE

Cel: W artykule rozważano zagadnienie istotności różnic w strukturach dwóch populacji lub większej ich liczby. W literaturze przedmiotu prezentowane są różne mierniki podobieństwa struktur, ale zasadniczo nie przedstawia się testów statystycznych pozwalających potwierdzić statystyczną istotność różnic w badanych strukturach. Celem artykułu jest przedstawienie propozycji testu statystycznego pozwalającego na potwierdzenie występowania istotnych różnic w strukturach na podstawie danych zawartych w tablicach wielodzzielczych.

Metodyka badań: Studia literatury. Przedstawiono propozycję testu statystycznego opartego na idei testu dokładnego Fishera.

Wyniki badań: Zastosowanie proponowanego testu przedstawiono na przykładzie wyników badań własnych dotyczących udziału w życiu kulturalnym aktywnych uczestników portali internetowych bezpośrednio przed wystąpieniem pandemii COVID-19 oraz w trakcie jej trwania.

Wnioski: Zaproponowana metoda pozwala na testowanie istotności różnic w strukturach dwóch populacji lub większej ich liczby. Możliwe jest wnioskowanie nawet na podstawie prób o niewielkich liczebnościach.

Wkład w rozwój dyscypliny: W badaniach ekonomicznych bardzo często występuje porównywanie struktur w populacjach. W artykule przedstawiona została propozycja testu statystycznego dla wskaźnika podobieństwa struktur.

Typ artykułu: oryginalny artykuł naukowy.

Słowa kluczowe: wnioskowanie statystyczne, metody permutacyjne, porównywanie struktur, wskaźnik podobieństwa struktur.

Klasyfikacja JEL: C12, C15, C18.

ABSTRACT

Objective: This article examines the significance of differences in the structures of two or more populations. Various measures of structural similarity are presented in the literature, but no statistical tests are available to confirm the statistical significance of differences in the structures being investigated. The aim of the article is to propose a statistical test to confirm the existence of significant differences in structures based on data from contingency tables.

Research Design & Methods: Literature review. The statistical test proposed is based on the idea of Fisher's exact test.

Findings: The test is applied to the results of original research on the participation of active internet portal users in cultural events before and during the COVID-19 pandemic.

Implications/Recommendations: The method allows for testing the significance of differences in the structures of two or more populations. Inference can be made based even on small size samples.

Contribution: Comparing structures in populations is common in economic research. The statistical test described herein contributes to knowledge on the indicator of structural similarity.

Article type: original article.

Keywords: statistical inference, permutation methods, comparing structures, indicator of structural similarity.

1. Wprowadzenie

W badaniach statystycznych często na podstawie prób losowych przeprowadzane jest wnioskowanie o nieznanymi parametrach populacji. W przypadku charakterystyk mierzonych na skalach mocnych (przedziałowa i ilorazowa) do przeprowa-

dzenia skutecznego wnioskowania statystycznego wystarczą próby o stosunkowo niewielkiej liczebności. W takich przypadkach wykorzystuje się najczęściej test t Studenta do porównania dwóch populacji lub test ANOVA do porównania k ($k > 2$) populacji w przypadku spełnienia założeń dotyczących normalności rozkładu. Jeśli założenie dotyczące postaci rozkładu nie jest spełnione, to najczęściej stosuje się testy oparte na rangach U Manna-Whitneya oraz nieparametryczną analizę wariancji, czyli test Kruskala-Wallisa.

W przypadku wnioskowania na podstawie charakterystyk mierzonych na skali słabej (porządkowa lub nominalna) najczęściej wykorzystywane są testy niezależności lub jednorodności chi-kwadrat. Pewną wadą tych testów jest konieczność dysponowania liczeźniejszymi próbami niż w przypadku testów stosowanych dla zmiennych na skalach mocnych. Wnioskowanie na podstawie danych w tablicach wielodzielczych wymaga, aby liczebności oczekiwane we wszystkich komórkach tablicy wynosiły przynajmniej 5 (Zeliaś, Pawełek i Wanat 2002, Sheskin 2004). Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to dla tablic o wymiarach 2×2 można np. wykorzystać metody uwzględniające poprawki Yatesa oraz Dandekara (Yates 1934, Rao 1973). Możliwe jest także skorzystanie z testu dokładnego Fishera (Fisher 1935). Ze względu na złożoność obliczeniową w literaturze rozważany jest test dokładny dla tablic o wymiarach 2×2 . Aktualnie dostępne oprogramowanie pozwala na wyliczenie odpowiednich prawdopodobieństw nawet dla tablic o większych wymiarach. Dzięki technice obliczeniowej możliwe jest też zastosowanie symulacyjnych przybliżeń testu dokładnego. Celem artykułu jest przedstawienie propozycji testu istotności dla wskaźnika podobieństwa struktur. Idea proponowanego testu jest oparta na symulacyjnym przybliżeniu testu dokładnego Fishera. Przykłady zastosowania proponowanego testu przedstawiono dla danych pozyskanych w badaniu dotyczącym aktywności kulturalnej uczestników portalu społecznościowego przed pandemią COVID-19 i w trakcie jej trwania.

2. Wnioskowanie dla tablic wielodzielczych – testy chi-kwadrat i test dokładny

Jednym z najczęściej spotykanych sposobów prezentowania wyników badań jest tablica wielodzielcza. Dane zamieszczone w tablicach wielodzielczych o wymiarach $r \times k$ mogą mieć różne mechanizmy powstawania. Najczęściej jest to związane z pobraniem próby o liczebności n z populacji, w której wyróżniono dwie zmienne klasyfikujące. W takim przypadku wnioskowanie statystyczne zwykle jest przeprowadzane z wykorzystaniem testu niezależności chi-kwadrat. Tablica wielodzielcza może być zbudowana po pobraniu prób z k populacji o liczebnościach n_1, n_2, \dots, n_k ze względu na jedną zmienną klasyfikacyjną. W takim przypadku kolejne wiersze przedstawiają strukturę odpowiedzi dla kolejnych populacji. Wnioskowanie staty-

styczne dotyczy wówczas jednorodności struktur w wyróżnionych k populacjach. W obu przypadkach, pomimo że formalnie przeprowadzany jest inny test statystyczny, wykorzystuje się identyczną postać statystyki testowej określonej wzorem (Domański 1979, Sheskin 2004):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}, \quad (1)$$

gdzie:

- r – liczba wierszy tablicy wielodzielczej,
- k – liczba kolumn tablicy wielodzielczej,
- $n_{ij}, i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, k$ – liczebności obserwowane,
- $\hat{n}_{ij}, i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, k$ – liczebności oczekiwane.

Przy założeniu słuszności hipotezy H_0 statystyka testowa ma asymptotycznie rozkład chi-kwadrat o $(k - 1)(r - 1)$ stopniach swobody. W celu skutecznego przeprowadzenia wnioskowania statystycznego na podstawie danych w tablicy wielodzielczej wymagane jest, aby liczebności oczekiwane we wszystkich komórkach tablicy wielodzielczej wynosiły przynajmniej 5 (Zeliaś, Pawełek i Wanat 2002). W literaturze przedstawiane są różne modyfikacje testu chi-kwadrat niezależności dla tablic o wymiarach 2×2 pozwalające na ograniczenie wspomnianego założenia. Poprawki takie zaproponowali m.in. F. Yates oraz V.M. Dandekar (Rao 1973). R.A. Fisher (1935) zaproponował test dokładny dla tablic 2×2 . Pozwala on uniknąć ograniczenia związanego z niespełnieniem wspomnianego warunku.

R.A. Fisher przedstawił propozycję testu z opisem eksperymentu „The Lady tasting tea”. Pewnego popołudnia w latach dwudziestych XX w. Sir Ronald Aylmer Fisher do filiżanki z herbatą dolał mleka i podał dr Blanche Muriel Bristol (Berry, Johnston i Mielke 2014, Salsburg 2001). Dr Bristol oznajmiła, że wołałaby herbatę z mlekiem, do której w pierwszej kolejności wiano mleko. Fisher zauważył, że po wymieszaniu herbaty i mleka nie można stwierdzić, co było wcześniej wlane do filiżanki. Zaproponowano przeprowadzenie eksperymentu, który pozwoliłby stwierdzić, czy dr Bristol jest w stanie odróżnić filiżanki z herbatą i mlekiem, do których w różnej kolejności wiano mleko i herbatę. W eksperymencie do ośmiu filiżanek wiano mleko i herbatę, w tym do czterech najpierw mleko, a do pozostałych czterech herbatę. Dr Bristol miała za zadanie wskazać cztery filiżanki, do których w pierwszej kolejności wiano mleko, oraz cztery, do których w pierwszej kolejności wiano herbatę. Cały eksperyment można zapisać formalnie, ujmując wyniki doświadczenia w tablicę o wymiarach 2×2 i weryfikując odpowiednią hipotezę. Schemat zapisu wyników eksperymentu przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Tablica wielodzielcza o wymiarach 2×2

Kategoria X	Kategoria Y		Razem
	Y_1	Y_2	
X_1	a	b	$a + b$
X_2	c	d	$c + d$
Razem	$a + c$	$b + d$	n

Uwaga: $n = a + b + c + d$.

Źródło: opracowanie własne.

Przy ustalonych liczebnościach brzegowych jak w tabeli 1 prawdopodobieństwo wystąpienia a obserwacji w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie tablicy wielodzielczej można zapisać następująco:

$$P(Z = a) = \frac{\binom{a+b}{a} \binom{c+d}{c}}{\binom{n}{a+c}} = \frac{(a+c)!(b+d)!(a+b)!(c+d)!}{(a+b+c+d)!a!b!c!d!}. \quad (2)$$

Wszystkie możliwe układy wyników w tablicy wielodzielczej w eksperymencie „The Lady tasting tea” przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Możliwe układy liczebności w tablicy w eksperymencie „The Lady tasting tea”

a)	b)	c)	d)	e)																																																												
<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td colspan="2">Y</td></tr> <tr><td></td><td>Y_1</td><td>Y_2</td></tr> <tr><td>X_1</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>X_2</td><td>0</td><td>4</td></tr> </table>	X	Y			Y_1	Y_2	X_1	4	0	X_2	0	4	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td colspan="2">Y</td></tr> <tr><td></td><td>Y_1</td><td>Y_2</td></tr> <tr><td>X_1</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>X_2</td><td>1</td><td>3</td></tr> </table>	X	Y			Y_1	Y_2	X_1	3	1	X_2	1	3	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td colspan="2">Y</td></tr> <tr><td></td><td>Y_1</td><td>Y_2</td></tr> <tr><td>X_1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>X_2</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	X	Y			Y_1	Y_2	X_1	2	2	X_2	2	2	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td colspan="2">Y</td></tr> <tr><td></td><td>Y_1</td><td>Y_2</td></tr> <tr><td>X_1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>X_2</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	X	Y			Y_1	Y_2	X_1	1	3	X_2	3	1	<table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>X</td><td colspan="2">Y</td></tr> <tr><td></td><td>Y_1</td><td>Y_2</td></tr> <tr><td>X_1</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>X_2</td><td>4</td><td>0</td></tr> </table>	X	Y			Y_1	Y_2	X_1	0	4	X_2	4	0
X	Y																																																															
	Y_1	Y_2																																																														
X_1	4	0																																																														
X_2	0	4																																																														
X	Y																																																															
	Y_1	Y_2																																																														
X_1	3	1																																																														
X_2	1	3																																																														
X	Y																																																															
	Y_1	Y_2																																																														
X_1	2	2																																																														
X_2	2	2																																																														
X	Y																																																															
	Y_1	Y_2																																																														
X_1	1	3																																																														
X_2	3	1																																																														
X	Y																																																															
	Y_1	Y_2																																																														
X_1	0	4																																																														
X_2	4	0																																																														

Źródło: opracowanie własne.

Dla omawianego przypadku wszystkie liczebności oczekiwane wynoszą 2, a więc nie są spełnione założenia stosowania testu chi-kwadrat. W przedstawianym zagadnieniu możliwe jest jednak wyznaczenie prawdopodobieństw teoretycznych wystąpienia poszczególnych układów liczebności.

Dla ustalonych liczebności brzegowych liczba wszystkich możliwych układów wynosi 70. Liczba wszystkich możliwości dla poszczególnych wariantów układów liczebności w tablicy wielodzielczej zaprezentowanych w tabeli 2 jest następująca:

$$\text{a) } \binom{4}{4} = 1,$$

$$\text{b) } \binom{4}{3} \binom{4}{1} = 4 \cdot 4 = 16,$$

$$\text{c) } \binom{4}{2} \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36,$$

$$\text{d) } \binom{4}{1} \binom{4}{3} = 4 \cdot 4 = 16,$$

$$\text{e) } \binom{4}{0} = 1.$$

Prawdopodobieństwa wystąpienia układów liczebności a–e zaprezentowanych w tabeli 2 przedstawione zostały w tabeli 3.

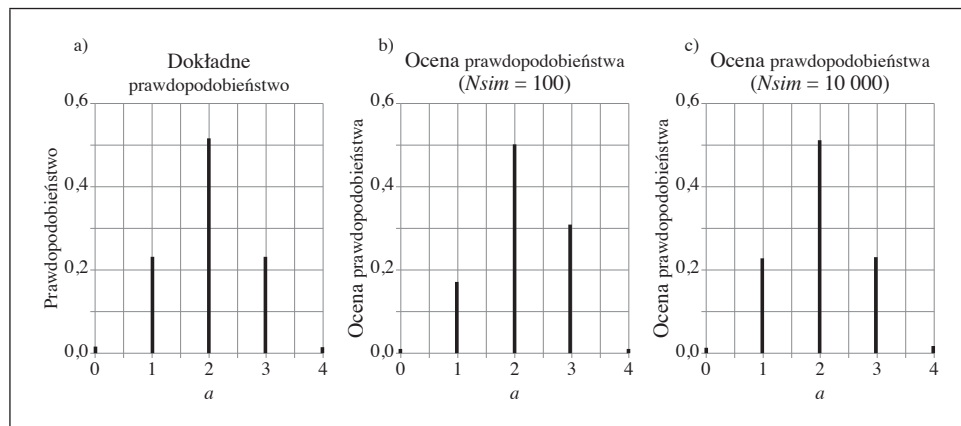
Tabela 3. Prawdopodobieństwa wystąpienia a obserwacji w pierwszej komórce tablicy 2×2 w eksperymencie „The Lady tasting tea”

a	$P(Z = a)$
0	0,0143
1	0,2286
2	0,5143
3	0,2286
4	0,0143

Źródło: obliczenia własne.

Prawdopodobieństwo właściwego wskazania w sposób przypadkowy wszystkich filiżanek, do których w pierwszej kolejności wiano mleko, wynosi $\frac{1}{70}$, czyli ok. 0,0143. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$, przy zajściu zdarzenia polegającego na bezbłędnym wskazaniu wspomnianych filiżanek należy odrzucić hipotezę o braku możliwości rozróżnienia tak przygotowanych napojów.

Poza rozwiązaniem dokładnym możliwe jest też zastosowanie rozwiązania symulacyjnego dla opisanego eksperymentu. Polega ono na losowym generowaniu tablic jak w tabeli 2 przy założeniu hipotezy H_0 i przy ustalonych liczebnościach brzegowych. Uzyskuje się to poprzez permutowanie jednej ze zmiennych i następnie konstrukcję tablicy wielodzielczej. P. Good (2006) wskazuje, że liczba takich powtórzeń powinna wynosić 1000 lub więcej. Prawdopodobieństwa teoretyczne wystąpienia a prawidłowych wskazań w eksperymencie „The Lady tasting tea” przedstawiono w pierwszej części rys. 1. W kolejnych częściach przedstawiono oceny tych prawdopodobieństw na podstawie $N_{sim} = 100$ oraz $N_{sim} = 10\,000$ symulacji. Widoczna jest bardzo duża zgodność uzyskanych ocen prawdopodobieństwa z prawdopodobieństwami teoretycznymi na podstawie $N_{sim} = 10\,000$ symulacji.



Rys. 1. Dokładne prawdopodobieństwa (a) i symulacyjnie otrzymane oceny prawdopodobieństw (b i c) dla eksperymentu “The Lady tasting tea”

Źródło: obliczenia własne w programie R.

Przedstawiony dokładny sposób testowania hipotezy o niezależności zmiennych możliwy jest do wykonania dla tablic o wymiarach 2×2 . Dla tablic o większych wymiarach niż 2×2 skuteczną alternatywą jest uzyskanie przybliżonego rozwiązania metodą symulacyjną.

3. Porównanie struktur – testowanie istotności różnic w strukturach

Badanie podobieństwa struktur jest zagadnieniem szeroko opisanym w literaturze przedmiotu. Porównanie struktur może dotyczyć różnych zjawisk dla ustalonego okresu, jak również danego zjawiska w różnych okresach. Do pomiaru zgodności struktur wykorzystywane są zarówno mierniki podobieństwa, jak i mierniki niepodobieństwa. O ile w literaturze są prezentowane różne mierniki podobieństwa struktur, o tyle zasadniczo nie przedstawia się testów statystycznych pozwalających potwierdzić statystyczną istotność różnic w badanych strukturach. Propozycję testowania istotności różnic w strukturach przedstawił A. Sokołowski (1993). W dalszej części artykułu zostanie zaprezentowana propozycja testu istotności struktur oparta na symulacji komputerowej.

Rozważane będą dwie struktury, które mogą być zapisane następująco:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k],$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k],$$

gdzie u_j, v_j są j -tymi składowymi badanych struktur oraz $j = 1, 2, \dots, k$, dodatkowo spełniony jest warunek $\sum_{j=1}^k u_j = \sum_{j=1}^k v_j = 1$. Wskaźnik podobieństwa struktur dwóch populacji (Walesiak 1984, Kukuła 1986) wyraża się wzorem:

$$w_s(u, v) = \sum_{j=1}^k \min(u_j, v_j). \quad (3)$$

Wskaźnik ten może przyjmować wartości od 0 do 1. Wartość 0 wskaźnika w_s wskazuje na całkowitą różnicę w strukturach, a wartość 1, że badane struktury są identyczne. W literaturze przedmiotu przedstawiane są również inne mierniki podobieństwa struktur, jak też mierniki niepodobieństwa struktur (por. np. Batóg i Wawrzyniak 2018).

Możliwe jest także porównywanie nie dwóch, lecz wielu struktur (Polko i Kończak 2016, Batóg i Wawrzyniak 2018). Niech r będzie liczbą populacji, z których pobierane są próby, a k liczbą wariantów wskazań, jednakową dla każdej z tych populacji. Wyniki mogą być zapisane w postaci macierzy:

$$[w_{ij}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{r1} & w_{r2} & \dots & w_{rk} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie:

w_{ij} – udział j -tej składowej w i -tej próbie,

$\sum_{j=1}^k w_{ij} = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, k$ – liczba składowych w populacjach.

Przy porównywaniu r struktur wskaźnik (3) przyjmuje postać:

$$w_s(w_{ij}) = \sum_{j=1}^k \min_i w_{ij}. \quad (5)$$

Wskaźnik ten może przyjmować wartości od 0 do 1.

Przedstawienie wartości wskaźnika podobieństwa struktur pozwala określić, w jakim stopniu struktury są podobne. Jeśli badana jest tylko próba, to kluczowa jest odpowiedź na pytanie, czy różnice w strukturach są istotne statystycznie, czy mają wyłącznie charakter przypadkowy. Do testowania istotności różnic w strukturach może być wykorzystana statystyka chi-kwadrat określona wzorem (1), a także inne mierniki wykorzystywane w analizie tablic wielodzzielczych, jak np. współczynniki kontyngencji C Pearsona lub współczynnik V Cramera (Sheskin 2004). Prawidłowe wnioskowanie można przeprowadzić jednak tylko wówczas, gdy wszystkie liczebności oczekiwane wynoszą przynajmniej 5. Jeśli nie jest spełniony wspomniany warunek, to skutecznym rozwiązaniem jest wykorzystanie testu dokładnego. Ze względu na znaczną złożoność związaną z trudnością wskazania wszystkich

możliwych układów liczebności w tabelach zwykle niezbędne jest odwołanie się do symulacyjnego przybliżenia testu dokładnego. Procedura proponowanego testu symulacyjnego w celu porównania struktur w dwóch populacjach lub większej ich liczbie jest następująca:

1. Postawienie hipotez:

H_0 : podobieństwo struktur ma charakter nielosowy (struktury są podobne),

H_1 : podobieństwo struktur ma charakter losowy (struktury są niepodobne).

2. Przyjęcie poziomu istotności α .

3. Wybór postaci statystyki testowej T .

4. Obliczenie wartości statystyki testowej (T_0) dla danych z próby.

5. N -krotne permutowanie zmiennej klasyfikującej i dla każdej z permutacji obliczenie wartości statystyki T_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

6. Podjęcie decyzji na podstawie wartości statystyki T_0 i empirycznego rozkładu statystyki T uzyskanego symulacyjnie.

Za statystykę testową T przyjmuje się statystykę chi-kwadrat określoną wzorem (1), jako miernik poziomu występujących różnic w strukturach. Tak skonstruowany test jako symulacyjne przybliżenie testu dokładnego, przy odpowiedniej liczbie symulacyjnych replikacji, zapewnia rozmiar testu na poziomie istotności α (Berry, Johnston i Mielke 2014, Kończak 2016).

4. Uczestnictwo w kulturze – wnioskowanie o identyczności struktur na podstawie wyników przeprowadzonych badań własnych

W marcu i kwietniu 2022 r., a więc dwa lata po wybuchu pandemii COVID-19, przeprowadzone zostały badania ankietowe dotyczące uczestnictwa w wydarzeniach kulturalnych przed pandemią oraz w trakcie jej trwania. Kwestionariusze ankiety zostały skierowane do uczestników dużego portalu społecznościowego. Zostały one wypełnione anonimowo. Wśród 203 ankietowanych znalazło się 109 kobiet i 94 mężczyzn. Wiek respondentów wynosił od 13 do 51 lat, z czego największą grupę stanowiły osoby pomiędzy 20 a 30 rokiem życia. Wśród respondentów znaczna ich część miała wykształcenie licencjackie bądź inżynierskie. Drugą największą grupę stanowiły osoby z wykształceniem średnim, a na trzecim miejscu pod względem liczebności znalazły się osoby z wykształceniem wyższym magisterskim bądź ze stopniem doktora. Badanie miało na celu poznanie ogólnych preferencji kulturalnych, a także zmian w sposobie i częstotliwości korzystania z oferty kulturalnej przed pandemią oraz w trakcie jej trwania. Celem było również uzyskanie odpowiedzi na pytania, czy ograniczenia dostępności kultury dotknęły badanych, w jakich aspektach i czy zastępcza oferta kulturalna online była wystarczająca. Wyników badania nie można uznać za reprezentatywne dla całego społeczeństwa, ale jedynie dla aktywnych uczestników wiodącego portalu internetowego.

W związku z tym, że dostęp do standardowych form kultury był ograniczony, wiele instytucji przeniosło swoją działalność do internetu, a niektóre istniejące już wcześniej formy uczestnictwa w kulturze online zyskały na popularności. 32% ankietowanych ze względu na brak możliwości korzystania z oferty kulturalnej w formie tradycyjnej, zaczęło korzystać z portali streamingujących filmy. Wielu respondentów już wcześniej z nich korzystało, jednak część z nich wskazało, że w pandemii częstotliwość korzystania z tych portali zwiększyła się. Badanie wykazało również, że wzrosła podczas pandemii popularność ebooków i audiobooków. Dużym zainteresowaniem cieszyły się także koncerty online. Oprócz wymienionych dostępne były również inne alternatywne do standardowych sposoby korzystania z oferty kulturalnej, skorzystali z nich jednak nieliczni.

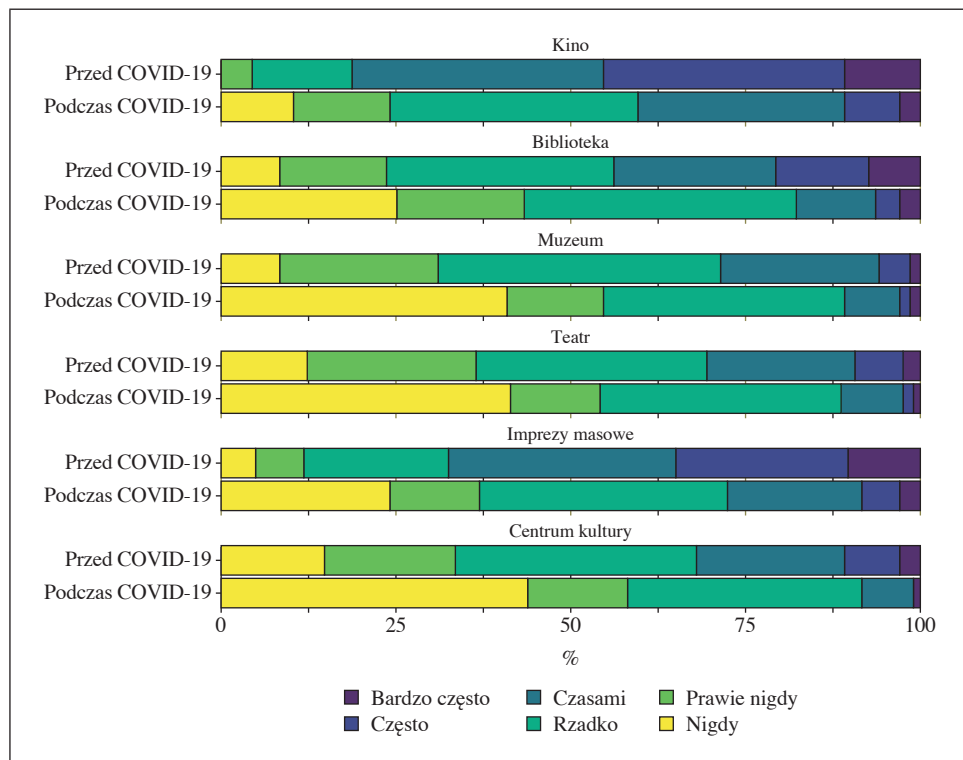
Badanie opinii respondentów wykazało, że w przypadku wielu osób pandemia wymusiła zmiany w ich planach związanych z uczestnictwem w wydarzeniach kulturalnych. Ważne wydaje się również przeświadczenie wielu ankietowanych o tym, że oferta kulturalna dostępna przez internet jest niewystarczająca. Oznacza to, że ten aspekt życia dla wielu nie jest możliwy do przeniesienia do sfery online. Strukturę deklarowanego uczestnictwa w różnych wydarzeniach kulturalnych przed wystąpieniem pandemii COVID-19 oraz w trakcie jej trwania przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Liczba wskazań uczestnictwa w wydarzeniach kulturalnych przed wystąpieniem pandemii COVID-19 ($t = 1$) i w trakcie jej trwania ($t = 2$)

Rodzaj aktywności	Czas t	Bardzo często 1	Często 2	Czasami 3	Rzadko 4	Prawie nigdy 5	Nigdy 6
Kino	1	22	70	73	29	9	0
	2	6	16	60	72	28	21
Biblioteka	1	15	27	47	66	31	17
	2	6	7	23	79	37	51
Muzeum	1	3	9	46	82	46	17
	2	3	3	16	70	28	83
Teatr	1	5	14	43	67	49	25
	2	2	3	18	70	26	84
Imprezy masowe	1	21	50	66	42	14	10
	2	6	11	39	72	26	49
Centrum kultury	1	6	16	43	70	38	30
	2	2	0	15	68	29	89

Źródło: badania własne.

Strukturę poszczególnych kategorii aktywności przed wystąpieniem pandemii COVID-19 i w trakcie jej trwania przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Struktura odpowiedzi ankietowanych dotyczących uczestnictwa w wydarzeniach kulturalnych przed wystąpieniem pandemii COVID-19 i w trakcie jej trwania
Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 5 przedstawiono wartości wskaźników podobieństwa struktur (3) dla różnych aktywności. Wszystkie wartości są zbliżone i mieszczą się w przedziale od 0,59 do 0,71. Jednocześnie zauważalne są zmiany w kierunku ograniczenia aktywności w trakcie trwania pandemii. Podanie wartości wskaźników podobieństwa lub niepodobieństwa struktur nie informuje jednak o ich statystycznej istotności. W celu sprawdzenia istotności statystycznej zmian w strukturach aktywności przeprowadzono test chi-kwadrat. We wszystkich przypadkach różnice w strukturze okazały się statystycznie istotne (największa p -wartość 10^{-12}). Jest to w dużej mierze wynikiem licznych prób – dla każdego rodzaju aktywności uzyskano po 203 odpowiedzi.

Tabela 5. Wartości wskaźnika podobieństwa struktur dla okresu przed wystąpieniem pandemii COVID-19 i w trakcie jej trwania

Rodzaj aktywności	Kino	Biblioteka	Muzeum	Teatr	Imprezy masowe	Centrum kultury
Wskaźnik podobieństwa struktur	0,591	0,739	0,675 ^a	0,695 ^a	0,601	0,709 ^a

^a ze względu na zbyt małe liczebności zastosowanie testu chi-kwadrat nie jest uzasadnione.

Źródło: obliczenia własne.

W jednym z przypadków, dla wskazań dotyczących uczestnictwa w spektaklach teatralnych, wyniki testu chi-kwadrat nie mogą być uznane za wiarygodne ze względu na zbyt małe liczebności oczekiwane w dwóch komórkach tablicy (por. tabela 6).

Tabela 6. Liczba wskazań uczestnictwa w spektaklach teatralnych przed wystąpieniem pandemii COVID-19 i w trakcie jej trwania oraz liczebności oczekiwane

Czas	Bardzo często	Często	Czasami	Rzadko	Prawie nigdy	Nigdy
Przed pandemią COVID-19	5	14	43	67	49	25
	3,5	8,5	30,5	68,5	37,5	54,5
Podczas trwania pandemii COVID-19	2	3	18	70	26	84
	3,5	8,5	30,5	68,5	37,5	54,5

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych przedstawionych w tabeli 5.

W celu potwierdzenia wyników przeprowadzono permutacyjny test zgodności struktur. We wszystkich przypadkach test potwierdził statystyczną istotność różnic w strukturach. Dopiero wykorzystując proponowany permutacyjny test zgodności struktur, uzyskano potwierdzenie istotności różnic w strukturach dla aktywności związanej z uczestnictwem w spektaklach teatralnych. Stosując test zaproponowany przez A. Sokołowskiego (1993), również należy odrzucić hipotezę H_0 w przypadku wszystkich porównywanych struktur (wartości wskaźników podobieństwa struktury w tabeli 5, $w_\alpha = 0,77$).

Spośród 203 badanych jedynie niewielka część czynnie angażowała się w życie kulturalne przed wystąpieniem pandemii COVID-19. Łącznie takich osób było tylko 41. Liczbę wskazań najciekawszych aktywności dla osób należących do grup artystycznych według poziomu wykształcenia przedstawiono w tabeli 7.

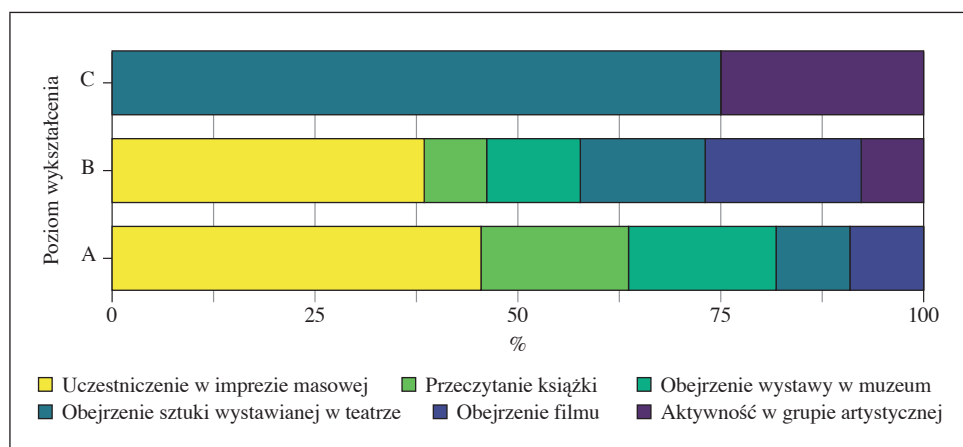
Strukturę poszczególnych kategorii aktywności dla osób należących do grup artystycznych według poziomu wykształcenia przedstawiono na rys. 3. Wskaźnik podobieństwa struktur dla danych zamieszczonych w tabeli 6 wynosi 0,09. Świadczy

to o występowaniu znacznych różnic w strukturze poszczególnych kategorii, co jest widoczne na rys. 3. Interesująca jest odpowiedź na pytanie o istotność różnic w strukturach dla wyróżnionych kategorii poziomu wykształcenia. Chcąc zbadać, czy struktury populacji są różne, należałoby skorzystać z testu jednorodności chi-kwadrat. Jednak ze względu na zbyt małe liczebności oczekiwane (por. tabela 8) nie może być on zastosowany.

Tabela 7. Liczba wskazań najciekawszych aktywności kulturalnych wybieranych przez aktywnych uczestników kultury ze względu na poziom wykształcenia respondentów

Wykształcenie	Rodzaj aktywności					
	aktywność w grupie artystycznej	obejrzenie filmu	obejrzenie sztuki wystawianej w teatrze	obejrzenie wystawy w muzeum	przeczytanie książki	uczestniczenie w imprezie masowej
A. Średnie	0	1	1	2	2	5
B. Wyższe licencjackie lub inżynierskie	2	5	4	3	2	10
C. Wyższe magisterskie lub doktoranckie	1	0	3	0	0	0

Źródło: badania własne.



Rys. 3. Struktura odpowiedzi ankieterowanych dotyczących aktywności kulturalnych wybieranych przez aktywnych uczestników kultury ze względu na poziom wykształcenia respondentów

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Liczebności oczekiwane dla danych przedstawionych w tabeli 6

Wykształcenie	Rodzaj aktywności					
	aktywność w grupie artystycznej	obejrzenie filmu	obejrzenie sztuki wystawianej w teatrze	obejrzenie wystawy w muzeum	przeczytanie książki	uczestniczenie w imprezie masowej
A. Średnie	0,80	1,61	2,15	1,34	1,07	4,02
B. Wyższe licencjackie lub inżynierskie	1,90	3,80	5,07	3,17	2,54	9,51
C. Wyższe magisterskie lub doktoranckie	0,29	0,59	0,78	0,49	0,39	1,46

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych przedstawionych w tabeli 6.

Podobnie jak w poprzednim przypadku zastosowany zostanie test permutacyjny. Weryfikacji poddane zostaną następujące hipotezy:

H_0 : podobieństwo struktur aktywności w wydarzeniach kulturalnych w grupach o różnych poziomach wykształcenia ma charakter nielosowy (struktury są podobne),

H_1 : podobieństwo struktur aktywności w wydarzeniach kulturalnych w grupach o różnych poziomach wykształcenia ma charakter losowy (struktury są niepodobne).

Oznaczając przez W_s wskaźnik podobieństwa struktur w populacji, wymienione hipotezy można zapisać następująco:

$$H_0: W_s = 1,$$

$$H_1: W_s < 1.$$

Korzystając z zaproponowanej metody permutacyjnej, wykorzystując 10 000 permutacji danych, otrzymuje się p -wartość w przybliżeniu równą 0,0350, co przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o identyczności struktur. Można twierdzić, że struktury wskazywanych aktywności kulturalnych aktywnych uczestników kultury w wyodrębnionych grupach wykształcenia różnią się. Wynik ten uzyskano dzięki zastosowaniu symulacyjnego przybliżenia testu dokładnego, którego propozycję przedstawiono w punkcie 3, a sama idea testu została zaczerpnięta z opisanego wcześniej testu dokładnego Fishera dla tablic wielodzzielczych o wymiarach 2×2 . Stosując test zaproponowany przez A. Sokołowskiego (1993), również należy odrzucić hipotezę H_0 ($w_s = 0,09$, $w_\alpha = 0,77$). Wszystkie przykłady zastosowania proponowanego testu przedstawione powyżej prowadzą do identycznych decyzji jak z zastosowaniem testu zaproponowanego przez A. Sokołowskiego (1993). Należy jednak podkreślić, że są to różne podejścia do zagadnienia

testowania różnic w strukturach. A. Sokołowski (1993) zakłada, że „struktura jest losowa, gdy granice tych podprzedziałów mają rozkład jednostajny”. Przedstawiona propozycja nie wymaga spełnienia takiego założenia, a wnioskowanie jest przeprowadzane wyłącznie na podstawie danych pochodzących z próby.

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono propozycję testu statystycznego pozwalającego na potwierdzenie występowania istotnych różnic w strukturach na podstawie danych zawartych w tablicach wielodzIELczych. W zaproponowanym teście wykorzystywane są symulacje komputerowe do wyznaczenia p -wartości, na podstawie której stwierdza się brak podstaw do odrzucenia hipotezy o jednakowych strukturach lub odrzuca się hipotezę H_0 , potwierdzając występowanie istotnych różnic w strukturach. Test może być stosowany do porównania struktur w dwóch populacjach lub większej ich liczbie.

Zastosowanie proponowanego testu przedstawiono na przykładzie wyników badań własnych dotyczących udziału w życiu kulturalnym aktywnych uczestników portalu internetowego bezpośrednio przed wystąpieniem pandemii COVID-19 oraz w trakcie jej trwania. Ze względu na małe liczebności prób uzyskanie potwierdzenia istotności różnic w strukturach aktywności w wydarzeniach kulturalnych przed pandemią i w trakcie jej trwania z wykorzystaniem testu jednorodności chi-kwadrat nie byłoby możliwe. Zastosowanie proponowanego testu potwierdziło występowanie istotnych różnic w strukturze aktywności udziału w różnych formach wydarzeń kulturalnych w trakcie pandemii COVID-19 w stosunku do takiej aktywności przed jej wystąpieniem.

Zaletą zaproponowanego testu jest to, że nie wymaga on tak dużych liczebności prób jak w przypadku testu chi-kwadrat jednorodności. Oczywiście potwierdzenie występujących różnic w strukturach populacji łatwiej uzyskać, dysponując próbami o dużych liczebnościach. Przedstawione analizy pokazały, że nawet przy próbach o relatywnie niewielkich liczebnościach możliwe jest potwierdzenie istotności różnic w strukturach populacji.

Literatura

- Batóg B., Wawrzyniak K. (2018), *Badanie dynamiki struktur przestrzennych dla wybranych zmiennych charakteryzujących rynek pracy w województwie zachodniopomorskim*, „Studia i Prace WNEiZ”, vol. 54, <https://doi.org/10.18276/sip.2018.54/1-04>.
- Berry K., Johnston J.E., Mielke P.W. Jr. (2014), *A Chronicle of Permutation Statistical Methods: 1920–2000, and Beyond*, Springer, Cham.
- Domański C. (1979), *Statystyczne testy nieparametryczne*, PWE, Warszawa.
- Fisher R.A. (1935), *The Design of Experiments*, Hafner Press, New York.

- Good P. (2006), *Resampling Methods: A Practical Guide to Data Analysis*, 3rd ed., Birkhäuser, Boston.
- Kończak G. (2016), *Testy permutacyjne: Teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Kukuła K. (1986), *Przegląd wybranych miar zgodności struktur*, „Przegląd Statystyczny”, vol. 33(4).
- Polko D., Kończak G. (2016), *On Using Permutation Tests in the Data Homogeneity Analysis* (w:) *Knowledge–Economy–Society. Selected Challenges for Statistics in Contemporary Management Sciences*, Foundation of the Cracow University of Economics, Cracow.
- Rao C.R. (1973), *Linear Statistical Inference and Its Application*, 2d ed, Wiley, New York.
- Salsburg D. (2001), *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*, W.H. Freeman, New York.
- Sheskin D. (2004), *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, 3rd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Sokołowski A. (1993), *Propozycja testu podobieństwa struktur*, „Przegląd Statystyczny”, vol. 40, nr 3–4.
- Walesiak M. (1984), *Pojęcie, klasyfikacja i wskaźniki podobieństwa struktur gospodarczych*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu”, nr 285.
- Yates F. (1934), *Contingency Tables Involving Small Numbers and the χ^2 Test*, „Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society”, vol. 1(2).
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2002), *Metody statystyczne: Zadania i sprawdziany*, PWE, Warszawa.