Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Metody analizy danych
904
ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2013; 904: 53–69

Paweł Najman
Katedra Matematyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Domknięcie i stabilność Bondy'ego-Chvátala grafów zwykłych – idee, formalizacje, uzupełnienia

Streszczenie

W artykule zaprezentowano wyniki badań związanych ze stabilnością wybranych własności grafów zwykłych. Przedstawiono genezę i definicję *k*-domknięcia oraz stabilności Bondy'ego-Chvátala, a następnie rezultaty dotyczące stabilności własności grafów zwykłych, dla których stabilność została dokładnie ustalona. Podano także przykłady prac, w których wykorzystano pojęcie domknięcia lub stabilności.

Słowa kluczowe: domknięcie Bondy'ego-Chvátala, stabilność Bondy'ego-Chvátala, własność grafów, grafy zwykłe.

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest przedstawienie wyników badań związanych ze stabilnością wybranych własności grafów zwykłych. Praca ma po części charakter noty bibliograficznej – wskazano w niej także szerszą dokumentację źródłową w celu prześledzenia aktualnych trendów i implikacji prezentowanych kluczowych (historycznych już) wyników.

Przedstawiono genezę i definicję *k*-domknięcia oraz stabilności Bondy'ego-Chvátala, a następnie wyniki dotyczące stabilności własności grafów zwykłych, dla których stabilność została dokładnie ustalona. Większość twierdzeń zostało podanych bez dowodu. Przedstawiono przede wszystkim te dowody twierdzeń, w których zdecydowano się podać uzupełnienia. Na zakończenie zaprezentowane zostały przykłady prac, w których wykorzystano pojęcie domknięcia lub stabilności.

Zapoczątkowany przez O. Orego [1960] kierunek badań nad grafami Hamiltona polegający na rozważaniu sumy stopni dwóch niepołączonych wierzchołków danego grafu osiągnął szczyt w 1976 r., kiedy to J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] wprowadzili pojęcie k-domknięcia grafu i stabilności własności grafów. Dla liczby całkowitej nieujemnej k, k-domknięciem $cl_k(G)$ grafu G nazywamy graf otrzymany z grafu G przez kolejne dodawanie krawędzi między niepołączonymi wierzchołkami, których suma stopni jest nie mniejsza niż k, aż takich wierzchołków nie będzie. J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] pokazali, że pojęcie domknięcia jest dobrze zdefiniowane, czyli jest jednoznacznie wyznaczone przez graf G bez względu na kolejność dodawania krawędzi.

Niech k będzie liczbą całkowitą. Własność P zdefiniowana dla wszystkich grafów rzędu n jest k-stabilna, gdy prawdziwa jest implikacja: jeśli dla dowolnego grafu G rzędu n i dla dowolnych dwóch niepołączonych wierzchołków u oraz v grafu G takich, że $d_G(u) + d_G(v) \geq k$, graf $G + uv$ ma własność P, to graf G ma własność P. Liczba k zwykle zależy od liczby wierzchołków n grafu G. Stabilność $s(P)$ własności P to najmniejsza liczba całkowita taka, że własność P jest k-stabilna. Pojęcia te otworzyły nowy horyzont badań grafów hamiltonowskich i innych własności grafów. Koncepcja domknięcia odgrywa bardzo ważną rolę w badaniach dotyczących istnienia cykli, ścieżek i innych podgrafów w grafach, nie tylko zwykłych.

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976], wykorzystując dowód twierdzenia O. Orego [1960], pokazali, że jeżeli u oraz v są dwoma niepołączonymi wierzchołkami grafu G takimi, że $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, to graf G jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy graf $G + uv$ jest hamiltonowski. Konsekwencją tego twierdzenia jest twierdzenie, że jeśli G jest grafem takim, że $n = |V(G)| \geq 3$ i $cl_n(G)$ jest grafem pełnym, to graf G jest hamiltonowski.

Mimo że czasami trudniej jest sprawdzić własność P w grafie $cl_n(G)$ niż w grafie G, za to graf „bliższy" grafowi K_n ma wiele interesujących własności. Teoria domknięcia opiera się na fakcie, który zauważyli J.A. Bondy i V. Chvátal [1976], że jeśli własność P jest k-stabilna i graf $cl_k(G)$ posiada własność P, to graf G też posiada tę własność.

Autorzy ci pokazali [1976], że graf $cl_n(G)$ może być skonstruowany z wykorzystaniem algorytmu działającego w czasie wielomianowym $O(n^4)$. Wynik ten został poprawiony przez J.L. Szwarcfitera [1987] – $O(n^3)$. Jeszcze inny algorytm działający w czasie $O(n^3)$ podał S. Khuller [1989], a złożoność obliczeniową otrzymania grafu

$cl_n(G)$ wyznaczył A. Monti [1996]. Co więcej, J.A. Bondy i V. Chvátal pokazali, że jeśli $cl_n(G) = K_n$, to dowolny cykl hamiltonowski w grafie K_n może być przetransformowany do cyklu Hamiltona w grafie G w czasie $O(n^3)$. Z tych dwóch rezultatów wynika, że znalezienie cyklu Hamiltona w grafie, dla którego $cl_n(G) = K_n$, jest problemem wielomianowym, a ogólnie jest to problem NP-zupełny.

Zainspirowanie się badaczy przedstawionymi wynikami przyczyniło się do rozwinięcia innych koncepcji domknięć. Większość z nich opiera się na warunkach sumy stopni niepołączonych wierzchołków z pewnym globalnym parametrem grafu, a niektóre dotyczą lokalnej struktury grafu. Wadą metody domknięcia Bondy'ego-Chvátala jest to, że $cl_n(G)$ może być grafem pełnym tylko wtedy, gdy $|E(G)| \geq \lfloor 0{,}125(n + 2)^2 \rfloor$ [Clark, Entringer i Jackson 1980].

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] ustalili stabilność dla wielu własności grafów. Ogólna metoda przeprowadzonego przez nich dowodu jest następująca. Najpierw dowodzi się, że dana własność jest k-stabilna. Następnie podaje się przykład grafu, który pokazuje, że uzyskana wartość k jest najmniejsza z możliwych, co ustala stabilność danej własności grafów.

W 1995 r. D. Amar i in. [1995] rozpoczęli studia nad domknięciem i stabilnością zrównoważonych grafów dwudzielnych. Dokonali podsumowania znanych wyników badań oraz ustalili bistabilność dla kilku znanych własności grafów dwudzielnych zrównoważonych.

W kolejnym punkcie artykułu przytoczone zostały definicje i oznaczenia używanych w nim pojęć. W przeważającej części notacja jest zgodna z zastosowaną w pracach J.A. Bondy'ego i U.S.R. Murthy'ego [1976] oraz F. Harary'ego [1969].

2. Podstawowe definicje i oznaczenia

Liczbę elementów zbioru X oznaczamy jako $|X|$ oraz $[X]^2 := \{S\colon S \subseteq X, |S| = 2\}$. Grafem zwykłym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem skończonym i $E \subseteq [V]^2$. Zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi grafu G oznaczamy odpowiednio jako $V(G)$ i $E(G)$, a przez $|V(G)| = n$ oznaczamy rząd grafu.

Krawędź łączącą wierzchołki u oraz v oznaczamy przez uv, wtedy wierzchołek u oraz krawędź $e = uv$ nazywamy incydentnymi.

Graf H nazywamy podgrafem grafu G, jeśli $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Mówimy wtedy, że graf G zawiera albo posiada graf H. Podgraf H grafu G nazywamy grafem częściowym (podgrafem) grafu G, jeśli $V(H) = V(G)$. Podgrafem grafu G indukowanym przez zbiór $W \subseteq V(G)$ nazywamy graf $G[W] := (W, E(G) \cap$ $\cap [W]^2)$. Jeśli $v \in V(G)$, $e \in E(G)$ i $W \subseteq V(G)$, to $G - v := G[V(G) \setminus \{v\}]$, $G - e :=$ $:= (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ i $G - W := G[V(G) \setminus W]$, a także $G + e := (V(G), E(G) \cup \{e\})$.

Jeśli $v \in V(G)$, to przez $N_G(v)$ oznaczamy zbiór wierzchołków połączonych (sąsiadujących) z wierzchołkiem v w grafie G. Stopień wierzchołka v w grafie G oznaczamy jako $d_G(v)$ i $d_G(v) := |N_G(v)|$, natomiast minimalny i maksymalny stopień wierzchołków grafu oznaczamy odpowiednio jako $\delta(G)$ i $\Delta(G)$. Graf G nazywamy r-regularnym, jeśli każdy jego wierzchołek jest stopnia r.

Niech $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ będą grafami wierzchołkowo rozłącznymi. Połączenie grafów $G_1 * G_2$ definiujemy następująco: $G_1 * G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup \cup E_2 \cup E_{1,2})$, gdzie $E_{1,2} := \{uv\colon u \in V_1, v \in V_2\}$. Sumę grafów $G_1 \cup G_2$ definiujemy następująco: $G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Ponadto przez kG oznaczamy sumę k kopii grafu G, a graf kK_2 nazywamy skojarzeniem. Wtedy liczbę k nazywamy rozmiarem skojarzenia.

Graf nazywamy spójnym, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch grafów o rozłącznych zbiorach wierzchołków.

Graf zwykły na n wierzchołkach taki, że każdy wierzchołek jest połączony ze wszystkimi pozostałymi, nazywamy grafem pełnym i oznaczamy jako K_n. Spójny graf zwykły dwuregularny na $n \geq 3$ wierzchołkach nazywamy cyklem i oznaczamy jako C_n. Cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu nazywamy cyklem Hamiltona, a graf, który posiada cykl Hamiltona, nazywamy grafem hamiltonowskim.

Ścieżką P_n nazywamy graf powstały z cyklu C_n przez usunięcie jednej krawędzi. Ścieżkę zawierającą wszystkie wierzchołki grafu nazywamy ścieżką Hamiltona.

O grafie niezawierającym cyklu mówimy, że jest acykliczny. Graf spójny acykliczny określany jest mianem drzewa. Wierzchołek stopnia pierwszego w drzewie nazywamy liściem.

Dopełnieniem $\overline{G}$ grafu G nazywamy graf taki, że $V(\overline{G}) = V(G)$ i $e \in E(\overline{G})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \notin E(G)$.

Grafem p-dzielnym nazywamy graf G, którego zbiór wierzchołków można podzielić na p niepustych rozłącznych podzbiorów X_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ tak, aby każda krawędź grafu G łączyła wierzchołek ze zbioru X_i z wierzchołkiem ze zbioru X_j, $1 \leq i < j \leq p$. Graf p-dzielny pełny oznaczamy przez $K_{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_p|}$; jest to taki graf p-dzielny, w którym każdy wierzchołek ze zbioru X_i jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami ze zbioru X_j, dla $i \neq j$ oraz $1 \leq i, j \leq p$. Grafem p-dzielnym zrównoważonym nazywamy taki graf p-dzielny, w którym $|X_i| = |X_j|$, $1 \leq i, j \leq p$.

Niech f i g będą ciągami liczb rzeczywistych. Zapisujemy $f(n) = O(g(n))$ wtedy, gdy istnieje stała dodatnia C taka, że $|f(n)| \leq C|g(n)|$ dla dostatecznie dużych wartości n. Mówimy, że ciąg $f(n)$ rośnie wielomianowo, jeśli $f(n) = O(n^m)$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m.

3. Geneza definicji *k*-domknięcia i stabilności własności grafów

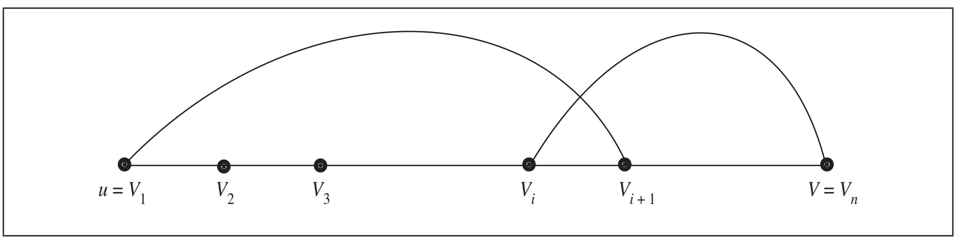
W niniejszym artykule wszelkie rezultaty odnoszą się do skończonych grafów, bez pętli i krawędzi wielokrotnych. Jeśli nie napisano inaczej, jako G oznaczono graf zwykły rzędu n.

Inspiracją do wprowadzenia definicji domknięcia grafu przez J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976] było twierdzenie O. Orego [1960] opierające się na pomyśle: „jeśli graf ma wystarczająco dużo krawędzi właściwie ulokowanych, jest hamiltonowski". O. Ore rozważał sumę stopni każdej pary niepołączonych wierzchołków grafu.

Twierdzenie 1. Jeśli G jest grafem rzędu $n \geq 3$ takim, że dla każdej pary niepołączonych wierzchołków u oraz v spełniony jest warunek $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, to G jest grafem hamiltonowskim.

Dowód. Załóżmy, że przy spełnionych założeniach teza twierdzenia nie jest prawdziwa. Wtedy istnieje maksymalny niehamiltonowski graf G rzędu $n \geq 3$ spełniający założenia twierdzenia. Oznacza to, że G nie jest grafem hamiltonowskim, ale dla każdej pary niepołączonych wierzchołków u i v tego grafu graf $G + uv$ jest hamiltonowski. Skoro $n \geq 3$, graf G nie jest grafem pełnym.

Ustalmy dwa niepołączone wierzchołki u oraz v i rozważmy graf $H = G + uv$, który jest grafem hamiltonowskim. Zauważmy, że każdy cykl Hamiltona w grafie H musi zawierać krawędź łączącą wierzchołki u oraz v. Zatem w grafie G istnieje ścieżka Hamiltona, której wierzchołkami końcowymi są wierzchołki u oraz v, tzn. $v_1v_2 \dots v_n$, gdzie $v_1 = u$, $v_n = v$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $v_{i+1} \in N_G(u)$, to $v_i \notin N_G(v)$, dla $1 \leq i \leq n-2$, bo w przeciwnym wypadku $v_1v_{i+1}v_{i+2} \dots v_nv_iv_{i-1}$ byłby cyklem Hamiltona w grafie G (zob. rys. 1).



Rys. 1. Ścieżka i możliwe połączenia

Źródło: opracowanie własne.

Dla każdego wierzchołka połączonego z u istnieje zatem wierzchołek ze zbioru $V(G - v)$, który nie jest połączony z v. Stąd otrzymujemy, że $d_G(v) \leq n - 1 - d_G(u)$, sprzeczność z $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. ■

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] zauważyli, że właściwie O. Ore udowodnił coś więcej – pokazał, że:

Twierdzenie 2. Jeśli u oraz v są dwoma niepołączonymi wierzchołkami grafu G takimi, że $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, to graf G jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy graf $G + uv$ jest hamiltonowski.

Dowód. „$\Rightarrow$" Jeżeli graf G jest hamiltonowski, to tym bardziej jest taki graf $G + uv$, otrzymany z G przez dodanie krawędzi łączących niepołączone wierzchołki o sumie stopni nie mniejszej niż n.

„$\Leftarrow$" Załóżmy, że graf $G + uv$ jest hamiltonowski, i przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że graf G nie jest hamiltonowski. Stosując dokładnie to samo postępowanie co w dowodzie twierdzenia Orego, otrzymujemy ostatecznie sprzeczność z założeniem o sumie stopni niepołączonych wierzchołków. ■

Definicja 1. k-domknięciem Bondy'ego-Chvátala grafu G rzędu n, oznaczanym przez $cl_k(G)$, nazywamy graf otrzymany z grafu G przez kolejne dodawanie krawędzi między niepołączonymi wierzchołkami u oraz v takimi, że $d_G(u) + d_G(v) \geq k$, aż takich wierzchołków nie będzie.

Łatwo zauważyć, że opisana operacja domykania grafu G rzędu n jest operacją skończoną (dodajemy krawędzie do momentu, aż nie będzie pary wierzchołków niepołączonych spełniających warunek o sumie stopni lub wszystkie wierzchołki będą parami połączone ze sobą). Pokażmy poprawność tej definicji. Skoro kolejność łączenia odpowiednich wierzchołków nie jest określona, musimy udowodnić, że $cl_k(G)$ nie zależy od kolejności dodawania krawędzi.

Twierdzenie 3. Jeżeli G_1 oraz G_2 są dwoma grafami otrzymanymi z grafu G przez kolejne łączenie par niepołączonych wierzchołków o sumie stopni co najmniej równej k, to $G_1 = G_2$.

Dowód. Niech $e_1, e_2, \ldots, e_i$ oraz $f_1, f_2, \ldots, f_j$ będą odpowiednio ciągami krawędzi dodawanych w grafie G w celu uzyskania k-tych domknięć G_1 oraz G_2. Pokażemy, że każda krawędź e_m, $m = 1, 2, \ldots, j$, jest krawędzią grafu G_2 oraz że każda krawędź f_n, $n = 1, 2, \ldots, j$, jest krawędzią grafu G_1.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $e_p = uv$, $p \in \{1, 2, \ldots, i\}$, jest pierwszą krawędzią w ciągu $e_1, e_2, \ldots, e_i$, która nie należy do zbioru krawędzi grafu G_2.

Rozważmy graf $H = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}\}$. Z definicji grafu G_1 wynika, że

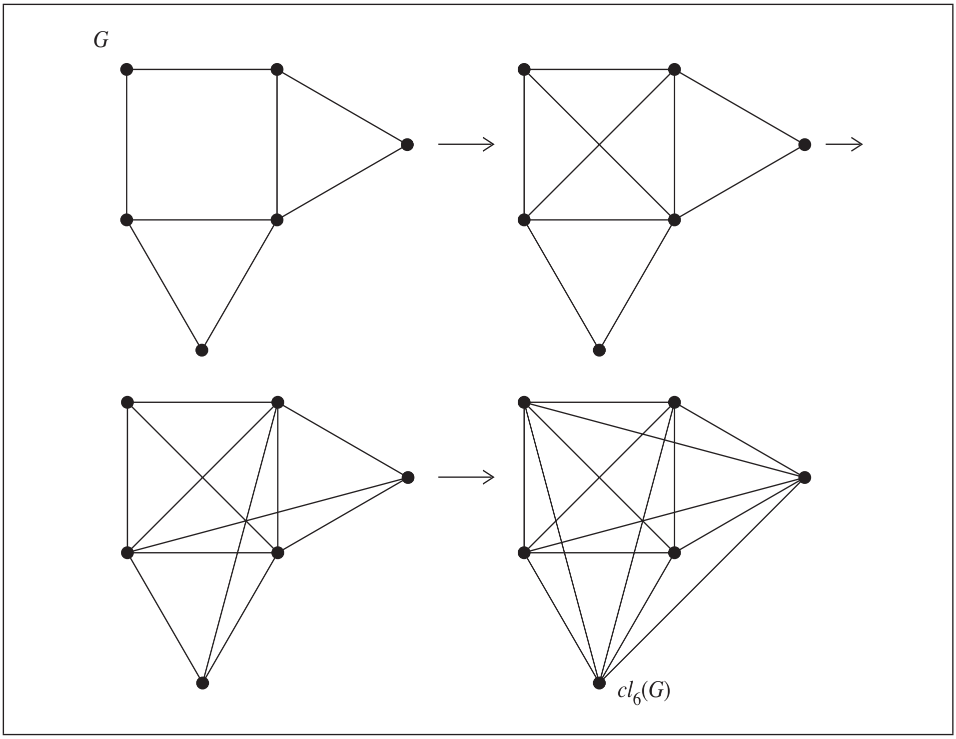
$$d_H(u) + d_H(v) \geq k,$$

gdyż G_1 jest domknięciem grafu G. Ponadto z wyboru krawędzi e_p wynika, że H jest podgrafem grafu G_2, gdyż $G_2 = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}\} + \{f_p, f_{p+1}, \ldots, f_j\}$. Zatem

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq \mathrm{k},$$

czyli zgodnie z definicją domknięcia grafu G wierzchołki u oraz v są połączone w grafie G_2, więc krawędź e_p należy do zbioru krawędzi grafu G_2, co stanowi sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że każda krawędź f_n, $n = 1, 2, \ldots, j$, należy do zbioru krawędzi grafu G_1. Wówczas otrzymujemy, że $G_1 = G_2$. ■

Rys. 2 przedstawia konstrukcję domknięcia $cl_6(G)$.



Rys. 2. Konstrukcja domknięcia $cl_6(G)$
Źródło: opracowanie własne.

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu G rzędu n

$$G = cl_{2n-3}(G) \subseteq cl_{2n-4}(G) \subseteq \ldots \subseteq cl_1(G) \subseteq cl_0(G) = K_n,$$

gdzie $H \subseteq G$ oznacza, że graf H jest grafem częściowym grafu G.

O ogromnym znaczeniu definicji domknięcia Bondy'ego-Chvátala w teorii grafów mówi następujące twierdzenie, będące podsumowaniem wcześniejszych rozważań.

Twierdzenie 4. Graf G rzędu n jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy jego n-domknięcie $cl_n(G)$ jest grafem hamiltonowskim. W szczególności G jest grafem hamiltonowskim, gdy jego n-domknięcie jest grafem pełnym.

Dowód. „$\Rightarrow$" Jeśli graf G jest hamiltonowski, to tym bardziej jest taki graf $cl_n(G)$, otrzymany z G przez dodanie krawędzi łączących niepołączone wierzchołki o sumie stopni nie mniejszej niż n.

„$\Leftarrow$" Jeśli $cl_n(G) = G$, teza została udowodniona. Przypuśćmy, że $cl_n(G) \neq G$. Niech graf $cl_n(G)$ powstaje z grafu G poprzez dodanie krawędzi $e_1, e_2, \ldots, e_r$, gdzie r jest liczbą całkowitą dodatnią, tzn. $cl_n(G) = G + e_1 + e_2 + \ldots + e_r$. Niech $G_i = G + e_1 + \ldots + e_i$, dla $i = 1, 2, \ldots, r$, wtedy $G_r = cl_n(G) = G_{r-1} + e_r$. Skoro graf $cl_n(G)$ jest hamiltonowski i krawędź e_r została dodana między niepołączonymi wierzchołkami w grafie G_{r-1}, których suma stopni jest nie mniejsza niż n, to na mocy twierdzenia 2 graf G_{r-1} jest również hamiltonowski. Powtarzając przedstawione rozumowanie jeszcze $r - 1$ razy, otrzymujemy, że graf G jest hamiltonowski.

Twierdzenie 4 znacznie upraszcza dowody licznych warunków wystarczających dla grafów hamiltonowskich, ponieważ warunek o sumie stopni nieincydentnych wierzchołków jest mocniejszy od wielu innych warunków wystarczających.

Poniżej przedstawiono pojęcie stabilności własności grafów.

Definicja 2. Dowolny zbiór grafów P nazywamy własnością P.

Definicja 3. Jeśli $G \in P$ dla pewnego grafu G, to mówimy, że graf G ma własność P.

Niech P będzie własnością zdefiniowaną dla wszystkich grafów rzędu n.

Definicja 4. Własność P jest k-stabilna, gdy prawdziwa jest implikacja: jeżeli w dowolnym grafie G dla dowolnych dwóch niepołączonych wierzchołków u oraz v takich, że $d_G(u) + d_G(v) \geq k$, graf $G + uv$ ma własność P, to graf G ma własność P.

Liczba k zwykle zależy od liczby wierzchołków n grafu G. Korzystając z definicji 4, możemy napisać: własność P jest k-stabilna, jeśli

$$\left.\begin{cases} G \text{ nie ma własności } P \\ u, v \in V(G) \text{ oraz } uv \notin E(G) \\ G + uv \text{ ma własność } P \end{cases}\right\} \Rightarrow d_G(u) + d_G(v) < k.$$

Zauważmy, że każda k-stabilna własność jest $(k + 1)$-stabilna oraz że każda własność grafów G jest $(2n - 3)$-stabilna, ponieważ suma stopni niepołączonych wierzchołków w grafie G rzędu n nie przekracza $(n - 2) + (n - 2) = 2n - 4$.

Definicja 5. Stabilność $s(P)$ własności P to najmniejsza liczba całkowita k taka, że własność P jest k-stabilna.

Na mocy definicji 5 oraz podanych uwag stabilność dowolnej własności P grafów spełnia nierówność $s(P) \leq 2n - 3$.

4. Stabilność wybranych własności grafów zwykłych

4.1. Najbardziej znane własności

Jeśli nie podano inaczej, przedstawione w tym punkcie artykułu wyniki pochodzą z pracy J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976].

Twierdzenie 5. Własność P: „G jest hamiltonowski" spełnia $s(P) = n$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2 oraz na mocy definicji 4, otrzymujemy, że własność „graf jest hamiltonowski" jest n-stabilna. Przykład grafu $K_{n-1} \cup K_1$ plus jedna krawędź pomiędzy K_{n-1} i K_1 pokazuje, że wartość n jest najmniejsza z możliwych[1]. ■

Twierdzenie 6. Własność P: „G zawiera cykl C_k" spełnia

$$s(P) = \begin{cases} 2n-k & \text{dla } 3 \leq k \leq n, \quad \text{jeśli } k \text{ jest nieparzyste} \\ 2n-k-1 & \text{dla } 6 \leq k < n, \quad \text{jeśli } k \text{ jest parzyste} \\ n & \text{dla } k \in \{4, n\} \end{cases} .$$

Dowód. 1° Udowodnijmy najpierw, że $s(P) = 2n - k$, jeśli $4 \leq k \leq n$ i k jest nieparzyste, oraz że $s(P) = n$ dla $k = n$. Jeśli graf $G + uv$ zawiera cykl C_k, ale graf G go nie zawiera, to G zawiera ścieżkę $u_1u_2 \dots u_k$, gdzie $u_1 = u$, $u_k = v$. Niech H będzie podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków $\{u_i\colon 1 \leq i \leq k\}$. Wtedy graf $H + uv$ jest hamiltonowski, ale H nie jest hamiltonowski. Korzystając z twierdzenia 5 dla grafu H, mamy

$$d_G(u) + d_G(v) \leq 2(n-k) + d_H(u) + d_H(v) < 2(n-k) + k = 2n - k.$$

Niech k będzie liczbą nieparzystą. Rozważmy graf $P_{k-2} \cup \overline{K}_{n-k+2}$, oznaczając przez $v_1, v_2, \dots, v_{k-2}$ wierzchołki ścieżki P_{k-2}, a przez $v_{k-1}, v_k, \dots, v_{n-2}, u, v$ wierzchołki grafu $\overline{K}_{n-k+2}$. Wierzchołek u oraz wierzchołek v łączymy z wszystkimi wierzchołkami ze zbioru $\{v_{2i-1}\colon 1 \leq i \leq 0{,}5(k-1)\} \cup \{v_{k-1}, v_k, \dots, v_{n-2}\}$. Otrzymany w ten sposób przykład grafu[2] pokazuje, że wartość $2n - k$ jest najmniejsza z możliwych, gdy k jest nieparzyste i $3 \leq k \leq n$. Jeśli n jest parzyste i $k = n$, to znów przykład grafu $K_{n-1} \cup K_1$ plus jedna krawędź pomiędzy K_{n-1} i K_1 pokazuje, że wartość $2n - k = n$ jest najmniejsza z możliwych.

[1] Przykład ten omówiono również w pracy [Najman 2005].

[2] Uogólnienie podane przez autora w pracy [Najman 2005].

2° Niech k będzie liczbą parzystą taką, że $4 \le k < n$. Jeśli graf $G + uv$ zawiera cykl C_k, ale graf G go nie zawiera, to G zawiera ścieżkę $u_1u_2 \dots u_k$, gdzie $u_1 = u$, $u_k = v$. Niech H będzie podgrafem grafu G indukowanym przez zbiór wierzchołków $\{u_i: 1 \le i \le k\}$. Analogicznie jak w przypadku 1° $d_H(u) + d_H(v) < k$. Jeśli u i v nie mają wspólnego sąsiada na zewnątrz H, to tezę udowadniamy następująco:

$$d_G(u) + d_G(v) \le n - k + d_H(u) + d_H(v) < n \le 2n - k - 1.$$

Możemy zatem założyć, że u i v mają wspólnego sąsiada w na zewnątrz H. Niech

$$A := \{i: 2 \le i \le k, u \text{ jest połączony z } u_i\},$$
$$B := \{i: 2 \le i \le k, v \text{ jest połączony z } u_{i-1}\},$$

czyli $d_H(u) = |A|$ i $d_H(v) = |B|$. Jeśli $d_H(u) + d_H(v) < k - 1$, to tezę udowadniamy następująco:

$$d_G(u) + d_G(v) \le 2(n - k) + d_H(u) + d_H(v) < 2n - k - 1.$$

Możemy zatem założyć, że

$$|A| + |B| \ge k - 1. \tag{1}$$

Oprócz tego:

$$A \cap B = \emptyset, \tag{2}$$

ponieważ gdyby $i \in A \cap B$, to $u_1u_iu_{i+1} \dots u_ku_{i-1} \dots u_1$ byłby cyklem C_k w G.

Z (1) i (2) wynika, że

$$A \cup B = \{2, 3, \dots, k\}. \tag{3}$$

Zauważmy, że $3 \notin A$, w przeciwnym razie $u_1u_3u_4 \dots u_kwu_1$ byłby cyklem C_k w G. Podobnie $(k-1) \notin B$, w przeciwnym razie $u_1u_2 \dots u_{k-2}u_kwu_1$ byłby cyklem C_k w G. Zatem z (3) wynika, że 3 należy do B i $(k-1)$ należy do A; to znaczy, że u_k jest połączony z u_2 oraz u_1 jest połączony z u_{k-1}.

Zauważmy, że

$$j \in A \Rightarrow (j+1) \notin A, \tag{4}$$

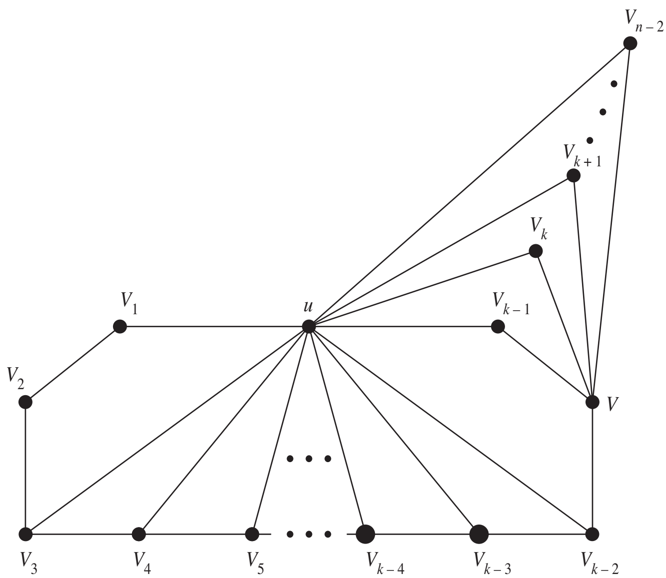
w przeciwnym razie $u_1u_{j+1}u_{j+2} \dots u_ku_2u_3 \dots u_ju_1$ byłby cyklem C_k w G. Podobnie

$$j \in B \Rightarrow (j+1) \notin B, \tag{5}$$

w przeciwnym razie $u_ku_j\, u_{j+1} \dots u_{k-1}u_1u_2 \dots u_{j-1}u_k$ byłby cyklem C_k w G.

Reasumując, z (3), (4), (5) oraz informacji, iż $3 \in B$, wynika, że każdy nieparzysty j ($j \le k$) należy do B. W szczególności $(k-1) \in B$, co przeczy założeniu, że $(k-1) \notin B$.

Przykład grafu[3] zamieszczonego na rys. 3 pokazuje, że wartość $2n - k - 1$ jest najmniejsza z możliwych, gdy $k \geq 6$ jest parzyste. Dla własności zawierania cyklu C_4 uzyskujemy o wiele lepszy rezultat – stabilność wynosi n – będący konsekwencją twierdzenia 8 dla $k = 2$.



Rys. 3. Przykład grafu ustalający stabilność własności z drugiego przypadku z twierdzenia 6

Źródło: opracowanie własne.

W 2002 r. B. Randerath, I. Schiermeyer, M. Tewes i L. Volkmann [Randerath *et al*. 2002] zauważyli, że dowód twierdzenia 7 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6, wystarczy tylko przypisać dowolny wierzchołek v do cyklu długości k. Mamy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7. Własność P: „G zawiera cykl C_k z wierzchołkiem v" spełnia

$$s(P) = \begin{cases} 2n-k & \text{dla } 3 \leq k \leq n, \quad \text{jeśli } k \text{ jest nieparzyste} \\ 2n-k-1 & \text{dla } 6 \leq k < n, \quad \text{jeśli } k \text{ jest parzyste} \\ n & \text{dla } k \in \{4, n\} \end{cases}.$$

[3] Uogólnienie podane przez autora w pracy [Najman 2005].

Twierdzenie 8. Własność P: „G zawiera $K_{2,k}$ $(2 \leq k \leq n-2)$” spełnia $s(P) = n + k - 2$.

Twierdzenie 9. Własność P: „G zawiera P_k $(4 \leq k \leq n)$” spełnia $s(P) = n - 1$.

Dowód. Niech graf $G + uv$ zawiera ścieżkę $u_1 u_2 \ldots u_k$, gdzie $u_1 = u$, $u_k = v$. Załóżmy, że G nie zawiera żadnej ścieżki P_k. Niech H będzie podgrafem indukowanym w grafie G przez zbiór wierzchołków $\{u_i: 1 \leq i \leq k\}$. Wtedy graf $(H * K_1) + uv$ jest hamiltonowski, ale $H * K_1$ taki nie jest. Korzystając z twierdzenia 5 dla grafu $H * K_1$, mamy

$$(d_H(u) + 1) + (d_H(v) + 1) < k + 1.$$

Z drugiej strony wierzchołki u oraz v nie mają wspólnego sąsiada na zewnątrz H (w przeciwnym razie G zawierałby P_{k+1}), czyli

$$d_G(u) + d_G(v) \leq n - k + d_H(u) + d_H(v) < n - 1.$$

Rozważmy graf $K_{1,n-3} \cup K_2$, oznaczając przez $v_1, v_2, \ldots, v_{n-3}$ wierzchołki stopnia pierwszego, przez u wierzchołek stopnia $n - 3$ w grafie $K_{1,n-3}$, a przez v oraz w wierzchołki grafu K_2. Dodajemy $k - 4$ krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-4}v_{k-3}$. Otrzymany przykład grafu[4] pokazuje, że wartość $n - 1$ jest najmniejsza z możliwych.

Twierdzenie 10. Własność P: „G zawiera kK_2 $(2k \leq n)$” spełnia $s(P) = 2k - 1$.

Definicja 6. k-faktorem grafu G nazywamy k-regularny częściowy podgraf grafu G. 1-faktorem grafu G nazywamy skojarzenie pokrywające wszystkie wierzchołki grafu G.

Zauważmy, że graf G nieparzystego rzędu nie może posiadać k-faktora, gdy k jest liczbą nieparzystą, zatem rozważamy tylko przypadek, gdy kn jest liczbą parzystą.

Twierdzenie 11. Własność P: „G posiada k-faktor (kn jest liczbą parzystą i $9 \leq 3k + 3 \leq$ n)” spełnia $s(P) = n + 2k - 4$.

Definicja 7. Graf G nazywamy k-wierzchołkowo spójnym (k-krawędziowo spójnym), jeśli po usunięciu mniej niż k wierzchołków (mniej niż k krawędzi) otrzymany graf jest grafem spójnym.

Twierdzenie 12. Własność P: „G jest k-wierzchołkowo spójny (k-krawędziowo spójny) $(k \leq n \leq 2)$” spełnia $s(P) = n + k - 2$.

Definicja 8. Przez $\alpha(G)$ oznaczamy największą liczność zbioru niezależnych wierzchołków w grafie G (żadne dwa wierzchołki tego zbioru nie są połączone).

[4] Przykład podany przez autora w pracy [Najman 2005].

Twierdzenie 13. Własność P: „$\alpha(G) \le k$ ($k \le$ n)" spełnia $s(P) = 2n - 2k - 1$.

Definicja 9. Graf G nazywamy k-hamiltonowskim, jeśli po usunięciu co najwyżej k wierzchołków z grafu G otrzymany graf jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie 14. Własność P: „G jest k-hamiltonowski ($k \le n - 3$)" spełnia $s(P) = n + k$.

Definicja 10. Graf G nazywamy k-krawędziowo hamiltonowskim, jeśli dla dowolnego zbioru k krawędzi F, które tworzą parami rozłączne ścieżki w grafie G, graf G posiada cykl Hamiltona zawierający wszystkie krawędzie ze zbioru F.

Twierdzenie 15. Własność P: „G jest k-krawędziowo hamiltonowski ($k \le n - 3$)" spełnia $s(P) = n + k$.

Definicja 11. Graf G nazywamy hamiltonowsko spójnym, jeśli dowolne dwa wierzchołki w G są połączone ścieżką Hamiltona.

Definicja 12. Graf G nazywamy k-hamiltonowsko spójnym, jeśli po usunięciu co najwyżej k wierzchołków z G otrzymany graf jest hamiltonowsko spójny.

Twierdzenie 16. Własność P: „G jest k-hamiltonowsko spójny ($k \le n - 4$)" spełnia $s(P) = n + k + 1$.

Definicja 13. Graf G nazywamy trasowalnym, jeśli zawiera ścieżkę Hamiltona.

Korzystając z twierdzenia 9, gdy $k = n$, otrzymujemy:

Twierdzenie 17. Własność P: „G jest trasowalny ($n \ge 4$)" spełnia $s(P) = n - 1$. ■

Przez $\mu(G)$ oznaczamy najmniejszą liczbę parami rozłącznych ścieżek pokrywających wszystkie wierzchołki grafu G.

Twierdzenie 18. Własność P: „$\mu(G) \le k$ ($k \le n - 1$)" spełnia $s(P) = n - k$.

Definicja 14. Kliką w grafie G nazywamy podgraf pełny grafu G (niekoniecznie maksymalny).

Stabilność własności zawierania kliki K_t nie była znana aż do 2000 r., gdy H.J. Broersma, Z. Ryjáček i I. Schiermeyer [2000] podali przykład grafu, który pozwala określić stabilność tej własności.

Twierdzenie 19. Własność P: „G zawiera klikę K_t" spełnia $s(P) = 2n - 3$.

4.2. Inne własności grafów zwykłych

Definicja 15. Obwodem grafu G nazywamy długość najdłuższego cyklu w grafie G.

Wielu matematyków zauważyło, że własność P: „G posiada obwód k" spełnia $s(P) = n$ dla $k < n$. W 1995 r. S. Brandt i H.J. Veldman [1997] pokazali to w następujący sposób.

Twierdzenie 20. Jeśli G jest grafem rzędu n, to obwód grafu G równa się obwodowi grafu $cl_n(G)$.

Na mocy definicji 4 oraz twierdzenia 20 otrzymujemy:

Wniosek 1. Własność P: „G posiada obwód k ($k < n$)" spełnia $s(P) = n$. ■

W 1990 r. G.R.T. Hendry [1990] wprowadził pojęcie cyklu rozszerzalnego oraz grafu zawierającego cykl rozszerzalny.

Definicja 16. Cykl C w grafie G nazywamy rozszerzalnym (w G), jeśli istnieje cykl C' w G taki, że $V(C) \subseteq V(C')$ i $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Jeśli taki cykl C' istnieje, to mówimy, że cykl C może być rozszerzony do cyklu C' lub że cykl C' jest rozszerzeniem cyklu C.

Definicja 17. Graf G zawiera cykl rozszerzalny, jeśli zawiera co najmniej jeden cykl i każdy niehamiltonowski cykl jest rozszerzalny.

Definicja 18. Graf G ma własność S_k ($3 \le k \le n - 1$), jeśli każdy niehamiltonowski cykl długości co najmniej k jest rozszerzalny.

G.R.T. Hendry [1990] wyznaczył stabilność zawierania cyklu rozszerzalnego w grafach w następujący sposób.

Twierdzenie 21. Własność S_k jest $(2n - k - 1)$-stabilna, ale nie jest $(2n - k - 2)$--stabilna.

Na mocy definicji 5, 17 i 18 oraz twierdzenia 21 otrzymujemy:

Wniosek 2. Własność P: „G zawiera cykl rozszerzalny" spełnia $s(P) = 2n - 4$. ■

Poniżej przedstawiona została następna rzadko spotykana własność.

Definicja 19. Graf G jest k-liściowo spójny, jeśli dla dowolnego zbioru $S \subseteq V(G)$ oraz $|S| = k < n$ graf G zawiera drzewo częściowe F takie, że zbiór S jest zbiorem wierzchołków wiszących (liści) drzewa F. Drzewo F nazywamy S-częściowym drzewem w G.

Zauważmy, że graf jest dwuliściowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest hamiltonowsko spójny. W 1986 r. M.A. Gurgel i Y. Wakabayashi [1986] wykazali, że własność „G jest k-liściowo spójny" jest $(n + k - 1)$-stabilna. Dopiero w 2000 r. H.J. Broersma, Z. Ryjáček i I. Schiermeyer [2000] podali przykład grafu, który pozwala ustalić stabilność tej własności.

Twierdzenie 22. Własność P: „G jest k-liściowo spójny" spełnia $s(P) = n + k - 1$.

Tabela 1. Zestawienie stabilności wybranych własności grafów zwykłych

Twierdzenie	Własność P	$s(P)$
5	„G jest hamiltonowski (zawiera cykl C_n)"	n
6	„G zawiera cykl C_k ($3 \leq k \leq n$, k jest liczbą nieparzystą)"	$2n - k$
6	„G zawiera cykl C_k ($6 \leq k < n$, k jest liczbą parzystą)"	$2n - k - 1$
6	„G zawiera cykl C_4"	n
7	„G zawiera cykl C_k z wierzchołkiem v ($3 \leq k \leq n$, k jest liczbą nieparzystą)"	$2n - k$
7	„G zawiera cykl C_k z wierzchołkiem v ($6 \leq k < n$, k jest liczbą parzystą)"	$2n - k - 1$
7	„G zawiera cykl C_4 z wierzchołkiem v"	n
8	„G zawiera $K_{2,k}$ ($2 \leq k \leq n - 2$)"	$n + k - 2$
9	„G zawiera ścieżkę P_k ($4 \leq k \leq n$)"	$n - 1$
10	„G zawiera kK_2 ($2k \leq n$)"	$2k - 1$
11	„G posiada k-faktor (kn jest liczbą parzystą i $6 \leq 3k \leq n \leq 3$)"	$n + 2k - 4$
12	„G jest k-wierzchołkowo lub k-krawędziowo spójny ($k \leq n - 2$)"	$n + k - 2$
13	„$\alpha(G) \leq k$ ($k \leq n$)"	$2n - 2k - 1$
14	„G jest k-hamiltonowski ($k \leq n - 3$)"	$n + k$
15	„G jest k-krawędziowo hamiltonowski ($k \leq n - 3$)"	$n + k$
16	„G jest k-hamiltonowsko spójny ($k \leq n - 4$)"	$n + k + 1$
17	„G jest trasowalny ($4 \leq n$)"	$n - 1$
18	„$\mu(G) \leq k$ ($k \leq n - 1$)"	$n - k$
19	„G zawiera klikę K_t"	$2n - 3$
20	„G posiada obwód k ($k < n$)"	n
21	„G zawiera cykl rozszerzalny"	$2n - 4$
22	„G jest k-liściowo spójny"	$n + k - 1$

Źródło: opracowanie własne.

5. Wybrane zastosowania domknięcia i stabilności

W niniejszym punkcie artykułu podano przykłady prac, w których znalazły zastosowanie pojęcia domknięcia i stabilności oraz wyniki uzyskane w pracy J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976].

W 1989 r. D. Bauer i in. [1989] zastosowali pojęcie domknięcia do udowodnienia warunku wystarczającego dla grafów hamiltonowskich.

W 1990 r. H.J. Veldman [1990] udowodnił twierdzenie, dzięki któremu można łatwo otrzymać kilka wyników typu Fana [Fan 1984]. Pokazał to na przykładzie kilku twierdzeń z A. Benhocine i A.P. Wojdą [1987], wykorzystując stabilność następujących własności: „*G* jest *k*-hamiltonowski”, „*G* jest *k*-hamiltonowsko spójny” i „$\mu(G) \leq k$”.

W 1991 r. w pracach A.S. Hasratiana i N.K. Khachatriana [1991] oraz Y.-J. Zhu, F. Tiana i X.-T. Denga [1991] zastosowano metody dowodów J.A. Bondy’ego i V. Chvátala.

W 1993 r. R. Faudree i in. [1993] wprowadzili pojęcie pełnego domknięcia grafu i pełnej stabilności własności grafów. Liczbą pełnego domknięcia (*complete closure number*) $cc(G)$ grafu G rzędu n nazywamy największą liczbę całkowitą $k \leq 2n - 3$ taką, że $cl_k(G) = K_n$. Dla przykładu $cc(K_n) = 2n - 3$, $cc(K_n - e) = 2n - 4$, $cc(\overline{K}_n) = 0$ i $cc(G) = 2r$, gdy G jest grafem r-regularnym. Pełna stabilność (*complete stability*) $cs(P)$ własności P zdefiniowanej dla wszystkich grafów rzędu n to najmniejsza liczba całkowita k taka, że jeśli dla dowolnego grafu $cl_k(G) = K_n$, to graf G ma własność P. Liczba ta zwykle zależy od n i spełnia nierówność $cs(P) \leq s(P)$, zatem wyniki uzyskane przez J.A. Bondy’ego i V. Chvátala ułatwiły ustalenie pełnej stabilności pewnych własności grafów.

W 2002 r. B. Randerath i in. [2002] wykorzystali pojęcie domknięcia do sformułowania warunków wystarczających dla różnych własności (np. dla pancykliczności, wierzchołkowej pancykliczności).

G.R.T. Hendry [1991] w 1991 r. wykorzystał pojęcie bidomknięcia oraz bistabilność własności „*G* jest hamiltonowski” grafów dwudzielnych zrównoważonych, aby udowodnić wyniki swoich badań dotyczących zawierania cykli rozszerzalnych w grafach dwudzielnych.

Literatura

Amar D. *et al*. [1995], *Biclosure and Stability in Balanced Bipartite Graph*, „Journal of Graph Theory”, vol. 20, nr 4.

Bauer D. *et al*. [1989], *A Generalization of a Result of Häggkvist and Nicoghossian*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 47, nr 2.

Benhocine A., Wojda A. P. [1987], *The Geng-Hua Fan Conditions for Pancyclic or Hamilton-connected Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 42, nr 2.

Bondy J.A., Chvátal V. [1976], *A Method in Graph Theory*, „Discrete Mathematics”, vol. 15, nr 2.

Bondy J.A., Murthy U.S.R. [1976], *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York.

Brandt S., Veldman H.J. [1997], *Degree Sums for Edges and Cycle Lengths in Graphs*, „Journal of Graph Theory”, vol. 25, nr 4.

Broersma H.J., Ryjáček Z., Schiermeyer I. [2000], *Closure Concepts: A Survey*, „Graphs and Combinatorics”, vol. 16, nr 1.

Clark L., Entringer R.C., Jackson D.E. [1980], *Minimum Graphs with Complete k-closure*, „Discrete Mathematics”, vol. 30, nr 2.

Faudree R. *et al*. [1993], *The Complete Closure of a Graph*, „Journal of Graph Theory", vol. 17, nr 4.
Fan Geng-Hua [1984], *New Sufficient Conditions for Cycles in Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B", vol. 37, nr 3.
Gurgel M.A., Wakabayashi Y. [1986], *On k-leaf-connected Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B", vol. 41, nr 1.
Harary F. [1969], *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading.
Hasratian A.S., Khachatrian N.K. [1991], *Stable Properties of Graphs*, „Discrete Mathematics", vol. 90, nr 2.
Hendry G.R.T. [1990], *Extending Cycles in Graphs*, „Discrete Mathematics", vol. 85, nr 1.
Hendry G.R.T. [1991], *Extending Cycles in Bipartite Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B", vol. 51, nr 2.
Khuller S. [1989], *On Computing Graph Closures*, „Information Processing Letters", vol. 31, nr 5.
Monti A. [1996], *On the Computational Complexity of Graph Closures*, „Information Processing Letters", vol. 57, nr 6.
Najman P. [2005], *Stabilność Bondy'ego-Chvátala*, praca magisterska, AGH, Wydział Matematyki Stosowanej, Kraków.
Ore O. [1960], *Note on Hamilton Circuits*, „American Mathematical Monthly", vol. 67, nr 1.
Randerath B. *et al*. [2002], *Vertex Pancyclic Graphs*, „Discrete Applied Mathematics", vol. 120, nr 1–3.
Szwarcfiter J.L. [1987], *A Note on the Computation of the k-closure of a Graph*, „Information Processing Letters", vol. 24, nr 4.
Veldman H.J. [1990], *Short Proofs of Some Fan-type Results*, „Ars Combinatoria", nr 29.
Zhu Y.-J., Tian F., Deng X.-T. [1991], *More Powerful Closure Operations on Graphs*, „Discrete Mathematics", vol. 87, nr 2.

Bondy-Chvátal's Closure and Stability for Simple Graphs – Ideas, Formalisation and Complement

The paper looks at several results from research on the stability of different graph properties. Definitions of Bondy-Chvátal's closure and stability for simple graphs are first presented, followed by an overview of basic facts on the stability of selected simple graph properties, for which stability has been established exactly. Proofs for theorems concerning a new example are included. Papers in which closure operation or stability of graph properties have been applied are also presented.

Keywords: Bondy-Chvátal closure, Bondy-Chvátal's stability, graph property, simple graphs.