Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Metody analizy danych

904
ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2013; 904: 19–36

Renata Wróbel-Rotter
Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Estymowane modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej*

Streszczenie

W pracy omówiono zagadnienia wykorzystania dekompozycji funkcji w estymowanych modelach równowagi ogólnej do charakterystyki zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej. Dekompozycja funkcji rzędu pierwszego jest traktowana jako model regresji zależnej od stanu i estymowana metodami nieparametrycznymi. Wykorzystują one dowolnie liczną próbkę Monte Carlo, wygenerowaną z rozkładu prawdopodobieństwa dla wektora parametrów strukturalnych, opisującą nieznaną, nieliniową zależność. Estymacja oparta jest na technikach filtrowania i wygładzania wywodzących się z filtru Kalmana, zmodyfikowanych w sposób umożliwiający uwzględnienie znacznie większej zmienności parametrów regresji w modelach zależnych od stanu. Całość metodologii została zilustrowana na przykładzie zaczerpniętym z literatury.

* Praca powstała w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestnikom seminarium Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

Słowa kluczowe: dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej, analiza wrażliwości, wielowymiarowa reprezentacja funkcji, filtr Kalmana, regresja o parametrach zależnych od stanu.

1. Wprowadzenie

Praca została poświęcona zastosowaniom metod analizy wrażliwości w modelach równowagi ogólnej i stanowi kontynuację opracowania *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości* [Wróbel-Rotter 2011b]. W szczególności tematem jest analiza związku między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej modelu. Strukturalne równania dynamicznego modelu równowagi ogólnej tworzą nieliniowe systemy racjonalnych oczekiwań, które po rozwiązaniu i liniowej aproksymacji podlegają estymacji. Związek między parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej modelu ma charakter nieliniowy, a jego określenie jest trudne ze względu na stosowanie aproksymacji, ma jednak kluczowe znaczenie dla użyteczności modelu w analizach ekonomicznych. Celem opracowania jest prezentacja sposobów znajdowania i przybliżania zależności łączącej parametry strukturalne estymowanego modelu równowagi ogólnej z parametrami jego postaci zredukowanej. Zagadnienia prezentowane w pracy, stanowiące niewielką część metodologii związanej z estymacją i analizą modeli równowagi ogólnej, zostały zilustrowane na przykładzie zaczerpniętym z literatury.

2. Postać strukturalna i zredukowana

System równań strukturalnych estymowanego modelu równowagi ogólnej można zapisać w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem ustalonego wektora parametrów strukturalnych θ, postaci:

$$E_t[f^*(y^*_{t+1}, y^*_t, y^*_{t-1}, \varepsilon_t; \theta)] = 0, \tag{1}$$

gdzie E_t oznacza operator wartości oczekiwanej, warunkowej względem zbioru informacji w momencie t, y^*_t oznacza wektor wszystkich zmiennych endogenicznych w modelu, ε_t oznacza wektor egzogenicznych zakłóceń losowych i szoków występujących w postaci strukturalnej. Jej rozwiązanie prowadzi do postaci zredukowanej, umożliwiającej zapisanie reprezentacji modelu w przestrzeni stanów, która jest określana przez równanie przejścia:

$$s_t = As_{t-1} + B\varepsilon_t, \tag{2}$$

gdzie s_t oznacza wektor stanu, elementy macierzy A i B są nieliniowymi funkcjami parametrów strukturalnych θ modelu, oraz przez równanie obserwacji:

$$Y_t = F + Cs_t + v_t, \tag{3}$$

gdzie Y_t jest wektorem zmiennych obserwowalnych, zaś v_t jest wektorem zakłóceń losowych w równaniu obserwacji. Macierze parametrów A i B postaci zredukowanej zawierają kluczowe wielkości odpowiedzialne za wartości otrzymywanych charakterystyk modelowej gospodarki. Sposób rozwiązywania i aproksymacji modeli racjonalnych oczekiwań nie umożliwia określenia ich bezpośredniego powiązania z parametrami strukturalnymi θ, co powoduje, że należy tutaj zastosować dodatkowe metody, w szczególności techniki stosowane w analizie wrażliwości. W pracy zaprezentowano sposoby znajdowania i przybliżania zależności łączącej parametry strukturalne θ z parametrami macierzy przejścia A i B.

Ogólna definicja analizy wrażliwości (ang. *sensitivity analysis*) określa, w jakim stopniu niepewność związana z wnioskowaniem o danym czynniku wyjściowym w modelu (np. parametrze postaci zredukowanej) może zostać przypisana do źródeł niepewności związanych z poszczególnymi czynnikami wejściowymi (np. parametrami postaci strukturalnej). Pojęciem zbliżonym do analizy wrażliwości jest analiza niepewności, która ogranicza się do czynników wyjściowych w modelu. Do najważniejszych prac z zakresu analizy wrażliwości w modelach wielowymiarowych należą: [Saltelli *et al*. 2008, Saltelli *et al*. 2004, Osidele i Beck 2004, Ratto 2006, 2008, Berliant i Dakhlia 1997 oraz Saltelli 2002]. Zaprezentowane w artykule zagadnienia są kontynuacją zastosowań metod analizy wrażliwości globalnej (ang. *global sensitivity analysis*, GSA) w modelach równowagi ogólnej [Wróbel-Rotter 2011b].

3. Reprezentacja funkcji

Metoda reprezentacji funkcji znajduje zastosowanie do przybliżonego określenia charakteru nieliniowej i nieznanej zależności między poszczególnymi parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej estymowanego modelu równowagi ogólnej, które są konsekwencją sposobu rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań [Ratto 2006, 2008]. Została ona zaproponowana w pracy [Sobol' 2003]. Opiera się na wykorzystaniu skończonej dekompozycji funkcji na elementy coraz wyższego rzędu, znanej w literaturze pod nazwą wielowymiarowej reprezentacji funkcji (ang. *high dimensional model representation*, HDMR) [Sobol' 1993]. W przypadku modeli równowagi ogólnej nieznana, nieliniowa funkcja parametrów strukturalnych, $f(\tilde{\theta}) = f(\theta_1, ..., \theta_k)$, stanowiąca najczęściej element macierzy współczynników postaci zredukowanej *A* i *B*, może zostać aproksymowana przez skończoną sumę postaci:

$$f(\tilde{\theta}) = f_0 + \sum_{i}^{k} f_i(\theta_i) + \sum_{i}^{k} \sum_{j>i}^{k} f_{ij}(\theta_i, \theta_j) + \ldots + f_{12\ldots k}(\theta_1, \ldots, \theta_k). \tag{4}$$

Składniki dekompozycji zależą wyłącznie od parametrów strukturalnych modelu równowagi ogólnej odpowiadających indeksom danego elementu rozwinięcia. W szczególności $f(\theta_i) = f_i$ ($i = 1, \ldots, k$) są nazywane efektami głównymi (ang. *main effects*), elementy $f(\theta_i, \theta_j) = f_{ij}$ oznaczają efekty interakcji drugiego rzędu (ang. *second order interaction effects*), a $f_{12\ldots k}$ jest efektem interakcji *k*-tego rzędu. Elementy dekompozycji są ortogonalne w przypadku niezależności parametrów strukturalnych modelu, a sama dekompozycja jest jednoznaczna [Sobol' 2003]. Poszczególne składniki są definiowane przez odpowiednie wartości oczekiwane:

$$f_0 = E(\tilde{\theta}), \tag{5}$$

$$f_i(\theta_i) = E(\tilde{\theta} | \theta_i) - f_0, \tag{6}$$

$$f_{ij}(\theta_i, \theta_j) = E(\tilde{\theta} | \theta_i, \theta_j) - f(\theta_i) - f(\theta_j) - f_0, \tag{7}$$

$$f_{ijs}(\theta_i, \theta_j, \theta_s) = E(\tilde{\theta} | \theta_i, \theta_j, \theta_s) - f_{ij}(\theta_i, \theta_j) - f_{is}(\theta_i, \theta_s) - f_{js}(\theta_j, \theta_s) - f_i(\theta_i) - f_j(\theta_j) - f_s(\theta_s) - f_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{12\ldots k}(\theta_1 \ldots \theta_k) = E(\tilde{\theta} | \theta_1 \ldots \theta_k) + \ldots - \sum_{k=1}^{K} \sum_{l>k}^{K} f_{kl}(\theta_k, \theta_l) - \sum_{k=1}^{K} f_k(\theta_k) - f_0. \tag{8}$$

Elementy dekompozycji informują, jak bardzo rozważana funkcja parametrów strukturalnych $f(\tilde{\theta})$ odchyla się od średniego jej poziomu f_0 w wyniku obecności danego parametru strukturalnego bądź ich grupy. Dekompozycja funkcji jest uzasadniana na gruncie teoretycznym jako zależność $E(\tilde{\theta} | \theta_i)$ wynikająca z zagadnienia identyfikacji funkcji $g(\theta_i)$ jednego parametru, która najlepiej aproksymuje wyjściową zależność $f(\tilde{\theta}) = f(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ [Saltelli 2002]. Metoda aproksymacji takich zależności zakłada dowolnie ustalony punkt odniesienia (ang. *arbitrary reference point*) oraz ortogonalność parametrów strukturalnych. Oszacowana dekompozycja funkcji jest wykorzystywana do budowy indeksów wrażliwości umożliwiających określenie, która grupa parametrów ma największy wpływ na kształtowanie się danego parametru postaci zredukowanej. Bazują one na uogólnionej analizie wariancji, zaproponowanej w pracy [Sobol' 2003], szczegółowo omówionej w: [Sobol' *et al.* 2007]. Zagadnienie budowy indeksów wrażliwości z wykorzystaniem dekompozycji funkcji jest znane w literaturze pod nazwą ANOVA HDMR (ang. *analysis of variance* HDMR). Istota tej metody polega na konstrukcji skalarnej miary ważności wpływu danego parametru strukturalnego θ_i na zmienność $f(\tilde{\theta})$. Miara taka jest zdefiniowana przez iloraz (warunkowych względem θ_i) wariancji cząstkowych $V_i = V(f_i(\theta_i))$ oraz wariancji bezwarunkowej (całkowitej) $V = V(f(\tilde{\theta}))$. Otrzymujemy w ten sposób indeksy wrażliwości postaci: $S_i = V_i / V$ opisujące efekty główne, indeksy $S_{ij} = V_{ij} / V$ obrazujące efekty drugiego rzędu, wynikające wyłącznie z zależności między parametrami (ang. *second order interaction effects*) itd. W przypadku dekompozycji funkcji rzędu pierwszego rozważamy wyłącznie indeksy oparte na efektach głównych. Symbol „*i*" jest nazywany rzędem albo wymiarem indeksu wrażliwości.

4. Dekompozycja funkcji jako model regresji

Odchylenia nieznanej funkcji parametrów strukturalnych $f(\tilde{\theta}_t)$ od jej wartości oczekiwanej f_0, dla dekompozycji funkcji rzędu pierwszego, postaci:

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = f_1(\theta_{1t}) + \ldots + f_k(\theta_{kt}) + R_t \tag{9}$$

można potraktować jako model regresji zależnej od stanu (ang. *state dependent regression*, SDR):

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = p_{1t}^*(\theta_{1t})\, \theta_{1t} + \ldots + p_{kt}^*(\theta_{kt})\, \theta_{kt} + R_t, \tag{10}$$

gdzie indeks t oznacza kolejne obserwacje, w szczególności realizacje pochodzące z symulacji Monte Carlo, $p_{1t}^*(\theta_{1t})$, …, $p_{kt}^*(\theta_{kt})$ są współczynnikami regresji zależnej od stanu θ_t, z których każdy jest funkcją wyłącznie odpowiadającego mu parametru strukturalnego θ_{it}, $R_t \sim N(0, \sigma^2)$ oznacza sumy składników wyższych rzędów, traktowane jako zmienne losowe o niezależnych rozkładach normalnych, o zerowej wartości oczekiwanej i nieznanej wariancji σ^2. Każdy ze składników dekompozycji pierwszego rzędu $f_i(\theta_{it})$ jest funkcją wyłącznie jednego parametru strukturalnego θ_{it}, co oznacza, że parametry regresji zależnej od stanu $p_{it}^*(\theta_{it})$ są kształtowane wyłącznie przez pojedyncze zmienne wejściowe θ_{it}. Implikuje to równość pomiędzy elementami dekompozycji pierwszego rzędu a współczynnikami regresji zależnej od stanu:

$$f_i(\theta_{it}) = p_{it}^*(\theta_{it})\theta_{it} = p_{it}\theta_{it}. \tag{11}$$

Ostatecznie model podlegający estymacji przyjmuje postać:

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = p_{1t}\theta_{1t} + \ldots + p_{kt}\theta_{kt} + R_t. \tag{12}$$

Estymacja współczynników p_{it} jest równoważna estymacji elementów $f_i(\theta_{it})$ dekompozycji funkcji pierwszego rzędu, które następnie służą do budowy indeksów wrażliwości. Metody estymacji elementów drugiego i trzeciego rzędu prezentują m.in. [Ratto *et al*. 2004, Ratto 2008]. Dostępność dowolnie licznego zbioru obserwacji ilustrującego zależność parametrów strukturalnych i postaci zredukowanej, pochodzącego z symulacji Monte Carlo powoduje, że do oszacowania dekompozycji funkcji można wykorzystać podejście nieparametryczne. Metody te wywodzą się z technik stosowanych do identyfikacji skomplikowanych związków nieliniowych, występujących w układach dynamicznych charakteryzujących się złożoną strukturą stochastyczną, przy założeniu dostępności znacznej liczby danych empirycznych [Young 2000]. Do ich estymacji najczęściej wykorzystuje się modele regresji zależnej od stanu systemu (ang. *state dependent parameters*, SDP), w szczególności model regresji o współczynnikach zmiennych w czasie (ang. *time variable parameters*, TVP).

Ogólna postać modelu regresji o parametrach zależnych od stanu, dopuszczająca również występowanie zmiennych egzogenicznych (ang. *state dependent auto-regression with exogenous variables*, SDARX), przedstawia się następująco [Young 2000]:

$$y_t = z'_t \, \mathrm{p}_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

gdzie $z'_t = [-y_{t-1} \; -y_{t-2} \; \cdots \; -y_{t-n} \; u_{t-\delta} \; \cdots \; u_{t-\delta-m}]$ zawiera opóźnienia zmiennej zależnej y_t oraz bieżące i opóźnione wartości pojedynczej zmiennej niezależnej u_t, wektor parametrów:

$$\begin{aligned} p_t &= [a_1(\chi_t) \; a_2(\chi_t) \; \ldots \; a_n(\chi_t) \; b_0(\chi_t) \; \ldots \; b_m(\chi_t)]' = \\ &= [p_1(\chi_t) \; p_2(\chi_t) \; \ldots p_n(\chi_t) \; p_{n+1}(\chi_t) \; \ldots p_{n+m+1}(\chi_t)]' \end{aligned} \tag{13}$$

zawiera współczynniki $a_i(\chi_t)$, $i = 1, \ldots, n$, oraz $b_j(\chi_t)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, zależne od stanu $\chi_t = [z'_t \; U'_t]$, zaś U_t jest wektorem czynników innych niż u_t mogących mieć wpływ na zależność y_t i u_t, n i m oznaczają rzędy opóźnień, δ jest wartością opóźnienia pozwalającą na ujęcie różnicy między momentem wystąpienia zmiany w wartości u_t a pojawieniem się jej efektu w y_t. W kontekście zastosowania regresji zależnej od stanu do estymacji dekompozycji funkcji w analizie estymowanych modeli równowagi ogólnej przyjmujemy $\delta = 0$, $m = 0$, $n = 0$, $U_t = 0$, co implikuje $z_t = u_t$ i $p_t = [b_0(\chi_t)] = [p(\chi_t)]$. Oznacza to ograniczenie do zera liczby opóźnień zmiennej niezależnej, pozostawienie wyłącznie bieżących jej wartości oraz eliminację elementów autoregresyjnych. W przypadku zastosowania dekompozycji funkcji w modelach równowagi ogólnej zmienną niezależną stanowią parametry strukturalne θ_{it}.

Model SDARX powstał jako uogólnienie modelu regresji liniowej stosowane do układów dynamicznych o charakterze stochastycznym, polegające na uzależnieniu wartości parametrów regresji od położenia, w jakim znajduje się system w danym momencie. Szczególnymi przypadkami są:

a) modele regresji o współczynnikach zmiennych w czasie TVP, uzyskane po eliminacji zależności parametrów od stanu systemu i pozostawieniu wyłącznie możliwości ich stopniowej ewolucji w czasie: $p_t = [p_{1,t}\, p_{2,t} \cdots p_{n+m+1,t}]'$,

b) modele regresji zależnej od stanu SDP, uzyskane po eliminacji zmiennych egzogenicznych i pozostawieniu części autoregresyjnej.

Estymacja parametrów modelu regresji zależnej od stanu opiera się na metodach stosowanych standardowo w ekonometrii nieparametrycznej do szacowania parametrów regresji o współczynnikach zmiennych w czasie [Wasserman 2006, Härdle 1994]. W modelach TVP zakłada się dla współczynników powolną, stopniową ich ewolucję w czasie, podczas gdy w modelach SDP dopuszcza się znaczną zmienność parametrów regresji, wynikającą z ich bezpośredniego powiązania z wektorem stanu χ_t. Powoduje to, że techniki stosowane dla modeli o parametrach zmiennych w czasie stają się nieadekwatne i podlegają modyfikacji; szczegółową dyskusję tego zagadnienia zawiera praca [Young 2000]. W praktyce do nieparametrycznej identyfikacji zależności współczynników regresji od wektora stanu stosuje się procedurę wygładzania szeregu czasowego w ustalonych przedziałach, połączoną ze specjalnym sortowaniem danych oraz algorytmem iteracyjnej estymacji pojedynczych parametrów regresji (ang. *back-fitting procedures*). Efektem takiej estymacji jest ilustracja zależności pomiędzy poszczególnymi parametrami regresji i wektorem stanu w formie zbioru (wykresu) punktów, który następnie jest podstawą do estymacji modelu parametrycznego o stałych współczynnikach, najczęściej wielomianu.

Estymacja dekompozycji funkcji jako modelu regresji zależnej od stanu, w zastosowaniu do estymowanych modeli równowagi ogólnej, przebiega według następujących ogólnych etapów:

1) określenie procesu stochastycznego opisującego zmienność współczynników p_{it}, które są najczęściej reprezentowane przez procesy błądzenia losowego;

2) wygenerowanie próbki losowej z rozkładu prawdopodobieństwa dla θ (rozkładu *a posteriori* albo *a priori*) i uzyskanie wektora wartości opisujących nieznaną zależność między współczynnikami postaci zredukowanej i parametrami strukturalnymi;

3) nieparametryczna estymacja współczynników p_{it} na podstawie uzyskanej próbki Monte Carlo, składająca się z dwóch zasadniczych etapów:

a) zastosowania rekursywnych metod estymacji, wykorzystywanych w przypadku modeli o parametrach zmiennych w czasie do identyfikacji zależności parametrów regresji zależnej od stanu od zdefiniowanych zmiennych stanu.

b) parametryzacji zidentyfikowanej nieparametrycznie zależności między zmiennymi stanu a współczynnikami postaci zredukowanej, modelem o stałych współczynnikach, estymowanym najczęściej metodą największej wiarygodności.

5. Technika estymacji modeli o parametrach zależnych od stanu

Stosowanie procedury nieparametrycznej estymacji modeli regresji o współczynnikach zależnych od stanu bądź zmiennych w czasie wymaga przyjęcia założeń dotyczących procesu kształtującego ewolucję p_{it}, najczęściej ujmującego ich zmienność w sposób stochastyczny. Zmienność każdego z parametrów regresji p_{it} opisuje się przez dwuwymiarowy stochastyczny wektor stanu $x_{it} = [l_{it}\ d_{it}]'$, składający się z dwóch procesów, l_{it} oraz d_{it}, odpowiadających za zmianę poziomu oraz nachylenia krzywej reprezentującej parametr. Opis dynamiki stochastycznych zmiennych stanu x_{it} najczęściej jest dokonywany poprzez uogólnione procesy błądzenia losowego (ang. *generalized random walk*, GRW), zdefiniowane w formie równania przestrzeni stanów:

$$x_{it} = F_i x_{i,t-1} + G_i \eta_{it}, F_i = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, i = 1, 2, ..., m + n + 1, \qquad (14)$$

gdzie $\eta_{i,t} = [\eta_{1,i,t}\ \eta_{2,i,t}]'$ jest wektorem składników losowych o zerowej wartości oczekiwanej oraz diagonalnej macierzy kowariancji $Q_{\eta i}$, będących źródłem stochastycznych zmian parametrów w modelu regresji. Szczególnym przypadkiem GRW jest skalarny proces błądzenia losowego otrzymany po założeniu $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$ oraz $\alpha = \delta = 1$, który sprowadza się do zależności $l_{it} = l_{i,t-1} + \eta_{1,i,t}$ oraz $l_{it} = p_{it}$, najczęściej przyjmowanej w praktyce do opisu zmienności parametrów p_{it} w zastosowaniach dotyczących modeli równowagi ogólnej. Parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ oraz elementy macierzy kowariancji $Q_{\eta i}$, zwane w tym kontekście hiperparametrami, nie są znane i podlegają estymacji, najczęściej metodą największej wiarygodności; szczegóły zawiera praca [Young 2000].

Model regresji jest następnie zapisywany w formie przestrzeni stanów składającej się z równania przejścia, powstałego poprzez agregację indywidualnych równań dla poszczególnych parametrów, oraz równania obserwacji, łączącego wektor stanu ze zmienną obserwowalną:

$$x_t = F x_{t-1} + G\eta_t, \qquad (15)$$

$$y_t = H_t x_t + \mu_t, \qquad (16)$$

gdzie $x_t = [x'_{1t}\ x'_{2t}\ ...\ x'_{n+m+1,t}]'$, F oraz G są macierzami blokowo-diagonalnymi, zbudowanymi z macierzy F_i oraz G_i, η_t jest wektorem zawierającym wektory zakłóceń η_{it}, niezależnym od zakłóceń równania obserwacji μ_t, o macierzy kowariancji Q zbudowanej z indywidualnych macierzy kowariancji $Q_{\eta i}$. Macierz $H_t = [-y_{t-1}\ -y_{t-2}\ ...\ -y_{t-n}\ u_{t-\delta}\ ...\ u_{t-\delta-m}]$ w przypadku założenia skalarnego procesu błądzenia losowego dla p_{it}.

Zasadniczym elementem nieparametrycznej estymacji modeli regresji o parametrach zależnych od stanu jest filtrowanie i wygładzanie szeregu danych z zastosowaniem procedur wywodzących się z filtru Kalmana. Składa się ona z dwóch zasadniczych etapów: w pierwszym następuje filtrowanie uzyskanej próbki Monte Carlo za pomocą rekursywnie stosowanej metody najmniejszych kwadratów, natomiast w drugim dokonuje się estymacji pojedynczych parametrów regresji za pomocą wygładzania obserwacji w ustalonych przedziałach (ang. *fixed interval smoothing*, FIS), połączonego ze specjalnym sortowaniem danych. Filtrowanie próbki Monte Carlo zachodzi według następujących formuł [Young 2000]:

$$\hat{x}_{t|t-1} = F\,\hat{x}_{t-1} \text{ oraz } \hat{P}_{t|t-1} = F\hat{P}_{t-1}F' + GQ_rG', \tag{17}$$

gdzie wektory poprawek są dane przez:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t-1}H_t'[1 + H_tP_{t|t-1}H_t']^{-1}(y_t - H_t\hat{x}_{t|t-1}) \tag{18}$$

$$P_t = P_{t|t-1} + P_{t|t-1}H_t'[1 + H_tP_{t|t-1}H_t']^{-1}H_tP_{t|t-1} \tag{19}$$

oraz $Q_r = Q/\sigma^2$ jest macierzą określającą iloraz wariancji zakłóceń losowych η_t do wariancji resztowej σ^2, oraz $\hat{P}_t = P_t^*/\sigma^2$, gdzie P_t^* oznacza macierz kowariancji błędu predykcji wektora stanu. Wygładzanie metodą FIS oparte jest na następujących zależnościach:

$$\hat{x}_{t|N} = F^{-1}[\hat{x}_{t+1|N} + GQ_rG'L_t], \tag{20}$$

$$L_t = [I - P_{t+1}H_{t+1}'H_{t+1}]'\,[F'L_{t+1} - H_{t+1}'(y_{t+1} - H_{t+1}\hat{x}_{t+1})] \text{ oraz } L_N = 0, \tag{21}$$

$$P_{t|N} = P_t + P_tF'\,P_{t+1|N}^{-1}[P_{t+1|N} - P_{t=1|t}]\,P_{t+1|t}^{-1}FP_t, \tag{21}$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową. W modelach regresji zależnej od stanu zmienność parametrów regresji $p_i(\chi_t)$ jest znacznie większa niż zmienność p_{it} w modelach o współczynnikach zmiennych w czasie, co jest konsekwencją ich bezpośredniego powiązania ze zmiennymi stanu. Powoduje to nieadekwatność przyjmowanych w modelach TVP założeń, w szczególności dotyczących stosowania uogólnionych procesów błądzenia losowego do opisu dynamiki współczynników regresji. Proponowanym w praktyce rozwiązaniem *ad hoc* jest zmiana kolejności danych w taki sposób, aby uzyskana zmienność parametrów dla obserwacji posortowanych była mniej gwałtowna niż w szeregu wyjściowym [Young 2000].

Algorytm estymacji parametrów regresji zależnych od stanu sprowadza się do znalezienia wstępnych ocen parametrów regresji $\hat{p}_{it|N}^0$ z zastosowaniem procedur estymacji modeli o współczynnikach zmiennych w czasie, a następnie ich korygowania poprzez estymację FIS regresji pomocniczych dla pojedynczych współczynników regresji postaci:

$$y_t^i = p_{it} z_{it}, \tag{23}$$

gdzie $y_t^i = y_t - \sum_{j \neq i} z_{jt} \hat{p}_{it|N}^k$, k oznacza kolejną iterację. Indywidualne parametry regresji są szacowane po każdorazowym posortowaniu y_t^i i z_{it} rosnąco względem z_{it} [Young 2000]. Estymacja FIS regresji pomocniczych jest powtarzana do momentu ustabilizowania się wartości współczynnika determinacji bądź spełnienia innego kryterium zbieżności. Parametry wygładzania niezbędne do estymacji FIS są optymalizowane metodą największej wiarygodności.

Nakreślona metoda estymacji parametrów regresji zależnej od stanu stanowi ogólną technikę nieparametrycznej estymacji nieliniowych, stochastycznych systemów zaproponowaną w kontekście mechanistycznego podejścia do modelowania danych empirycznych (ang. *data-based mechanistic modelling*), w którym najważniejszym elementem jest uzyskanie modelu opisującego kształtowanie się badanego zjawiska. Metody należące do tej klasy nie zostały dokładnie opracowane pod względem warunków niezbędnych do określenia kryterium zbieżności, w szczególności nie są znane warunki stabilności algorytmu FIS oraz własności statystyczne estymatorów parametrów regresji i macierzy kowariancji. Podejście to stanowi alternatywę dla innych metod estymacji, ze względu na próbę identyfikacji charakteru nieliniowości występującego w danych przed ostateczną estymacją modelu parametrycznego (np. aproksymacji wielomianami). Umożliwia to stosowanie mniej sparametryzowanych modeli niż w przypadku np. sieci neuronowych [Young 2000].

6. Przykład empiryczny

Zastosowanie metod dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej w estymowanych modelach równowagi ogólnej został zilustrowany na przykładzie zaczerpniętym z pracy [Rabanal i Rubio-Ramírez 2005], który pierwotnie został zaproponowany w publikacji [Erceg, Henderson i Levin 2000]. W modelu zdefiniowano następujące zmienne: zagregowany produkt y_t, stopę procentową r_t, wskaźnik inflacji $\hat{\pi}_t$ oraz wskaźnik zmiany płacy nominalnej $\hat{\pi}_t^w$, realną płacę w_t^r, zakłócenia stochastyczne obecne w preferencjach konsumentów g_t oraz technologii producentów pośrednich a_t, nakład pracy n_t, koszt krańcowy produkcji dodatkowej jednostki dobra pośredniego mc_t oraz krańcową stopę substytucji między konsumpcją a pracą mrs_t. Model w postaci strukturalnej ma następującą postać:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma(r_t - E_t \hat{\pi}_{t+1} + E_t g_{t+1} - g_t), \tag{24}$$

$$mrs_t = \sigma\, y_t + \gamma\, n_t - g_t, \tag{25}$$

$$\hat{\pi}_t^w = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1}^w + \frac{(1-\beta\theta_w)(1-\theta_w)}{\theta_w(1-\gamma\varepsilon_w)}(mrs_t - w_t^r), \tag{26}$$

$$y_t = a_t + (1-\alpha)n_t, \tag{27}$$

$$mc_t = w_t^r + n_t - y_t, \tag{28}$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r + \hat{\pi}_t^w - \hat{\pi}_t, \tag{29}$$

$$\hat{\pi}_t = \beta\, E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + \frac{(1-\alpha)(1-\theta_p\beta)(1-\theta_p)}{\theta_p(1+\alpha(\overline{\varepsilon}-1))}(mc_t + \varepsilon_t^\lambda), \tag{30}$$

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1-\rho_r)(\gamma_\pi \hat{\pi}_t + \gamma_y y_t) + \varepsilon_t^z, \tag{31}$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a, \tag{32}$$

$$g_t = \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_t^g, \tag{33}$$

gdzie $\varepsilon_t^* = [\varepsilon_t^a\ \varepsilon_t^g\ \varepsilon_t^z\ \varepsilon_t^\lambda]'$ oznacza wektor zakłóceń losowych (szoków) postaci strukturalnej, $\theta = [\alpha\,\sigma\,\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\theta_p\ \rho_r\ \gamma_\pi\ \gamma_y\ \rho_a\ \rho_g\ \theta_w\ \varepsilon_w]'$ zawiera parametry strukturalne. Szczegółowe wyprowadzenie równań można znaleźć m.in. w pracach: [Wróbel-Rotter 2011a, c, 2012b]. Model ten był również wykorzystywany do ilustracji zagadnień estymacyjnych i numerycznych w pracach: [Wróbel-Rotter 2011b, 2012a]. Przykład ten został również wykorzystany do ilustracji zagadnień związanych z modelami DSGE połączonymi z wektorową autoregresją: [Wróbel-Rotter 2013d, b, c, a, e]. Prace te stanowią kontynuację badań związanych ze stosowaniem estymowanych modeli równowagi ogólnej w praktyce, które poprzedzają artykuły wprowadzające w tematykę: [Wróbel-Rotter 2012c, d] i wcześniejsze, ogólniejsze prace: [Wróbel-Rotter 2007c, a, b, 2008].

Implementację numeryczną wykonano w pakiecie Dynare, wykorzystując dodatkowe procedury opracowane przez EU Joint Research Centre w Isprze [Adjemian *et al*. 2011]. W ocenie zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej, w estymowanym modelu równowagi ogólnej próbka losowa jest generowana z rozkładu *a posteriori*, w praktyce wykorzystuje się realizacje otrzymane z algorytmu Metropolisa i Hastingsa. W przypadku zastosowania dekompozycji funkcji do analizy modelu przed jego estymacją bądź w modelach kalibrowanych próbkę losową generuje się z przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa dla parametrów strukturalnych, w szczególności z rozkładu *a priori*. Dekompozycja funkcji jest wykorzystywana do zbudowania indeksów wrażliwości, które odgrywają kluczową rolę w określeniu parametrów strukturalnych mających największy wpływ na parametry postaci zredukowanej bądź inną charakterystykę modelu, i służy zwykle jako narzędzie wstępnej analizy modelu.

W ramach zastosowania dekompozycji funkcji w estymowanych modelach równowagi ogólnej najczęściej analizuje się następujące zagadnienia:

1. Dla danej zmiennej endogenicznej rozważa się parametry strukturalne mające największy wpływ na współczynniki postaci zredukowanej znajdujące się przy jej opóźnieniach oraz opóźnieniach pozostałych zmiennych endogenicznych.

2. Dla danej zmiennej endogenicznej określa się parametry strukturalne mające największy wpływ na współczynniki w równaniu postaci zredukowanej znajdujące się przy zmiennych ujmujących egzogeniczne zakłócenia losowe (szoki).

3. Dla każdego z parametrów strukturalnych zestawia się wszystkie indeksy wrażliwości, co pozwala na wskazanie parametrów strukturalnych niemających znacznego wpływu na żaden z parametrów postaci zredukowanej. Oznacza to, że zmienność parametru strukturalnego nie koresponduje ze zmiennością parametru postaci zredukowanej i jej nie implikuje.

Ze względu na poprawność zastosowania algorytmu estymacji dekompozycji funkcji zwykle przed wykonaniem obliczeń dokonuje się oceny kształtu rozkładu interesującej nas funkcji parametrów strukturalnych $f(\tilde{\theta})$, w celu znalezienia najlepszej jej transformacji, tak aby otrzymany rozkład był jak najbardziej zbliżony do rozkładu gaussowskiego. W praktyce stosuje się najprostsze transformacje logarytmiczne, logarytmiczno-kwadratowe w przypadku symetrycznych grubych ogonów bądź skośne logarytmiczne dla rozkładów asymetrycznych. W przypadku rozważanej aplikacji zastosowano arbitralnie transformację logarytmiczno-kwadratową współczynników postaci zredukowanej, co implikuje budowę dekompozycji funkcji dla postaci:

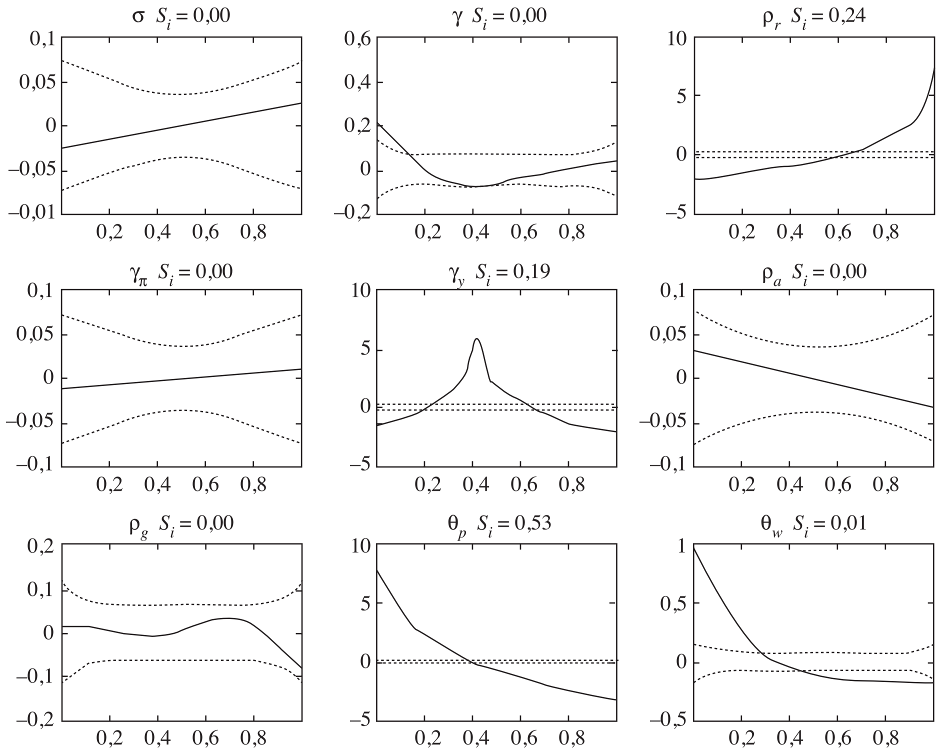
$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = exp\ 0{,}5(f_1(\theta_{1t}) + \ldots + f_k(\theta_{kt}) + R_t). \tag{34}$$

Najczęściej w zastosowaniach praktycznych modeli równowagi ogólnej obiektem zainteresowania są współczynniki postaci zredukowanej występujące w dwóch równaniach: inflacji i stopy procentowej znajdujące się przy opóźnionej stopie procentowej r_{t-1} i zakłóceniu monetarnym ε_t^z. Analiza wrażliwości sprawdza, który z parametrów strukturalnych θ_i najbardziej wpływa na kształtowanie się siły reakcji bieżącego wskaźnika inflacji π_t na poziom stopy procentowej z okresu poprzedniego r_{t-1} oraz – analogicznie – jak zmienia się współczynnik postaci zredukowanej opisujący odpowiedź inflacji π_t na zakłócenie strukturalne ε_t^z. Podobnie rozważamy wpływ parametrów strukturalnych θ_i na współczynniki postaci zredukowanej w równaniu stopy procentowej, opisujące zależność r_t od r_{t-1} oraz ε_t^z. Analizujemy zatem cztery współczynniki postaci zredukowanej, mając na celu określenie, który z parametrów strukturalnych θ_i ma największy wpływ na kształtowanie się siły wpływu szoku monetarnego ε_t^z na inflację π_t i stopę procentową r_t oraz wpływu opóźnionej stopy procentowej r_{t-1} na jej bieżący poziom r_t oraz bieżącą inflację π_t. Na rys. 1 przedstawiono indeksy wrażliwości S_i dla współczynnika przy zakłóceniu monetarnym ε_t^z znajdującego się w równaniu inflacji π_t oraz aproksymacje elementów pierwszego rzędu dekompozycji funkcji dla logarytmiczno-kwadratowej transformacji współczynnika wraz z 99,9-proc. przedziałami ufności (linie przerywane). Linie ciągłe, będące wykresami efektów głównych $f_i(\theta_i)$, przedstawiają udział każdego z parametrów strukturalnych θ_i w zmienności poddanego transformacji współczynnika postaci zredukowanej wokół jego średniej. Na osi odciętych znajduje się parametr postaci strukturalnej.

Obliczone indeksy wrażliwości wskazują, że największy wpływ na kształtowanie się współczynnika postaci zredukowanej przy zakłóceniu monetarnym występującym w równaniu inflacji ma parametr strukturalny θ_p, odpowiedzialny za 53% całkowitej jego zmienności. W dalszej kolejności znaczący wpływ mają również parametry ρ_r oraz γ_y, wyjaśniające odpowiednio 24% i 19% zmienności współczynnika postaci zredukowanej; pozostałe parametry strukturalne nie mają istotnego znaczenia. Analogiczna interpretacja dotyczy wyników uzyskanych dla współczynnika postaci zredukowanej znajdującego się przy opóźnionej stopie procentowej w równaniu inflacji (nieilustrowane). Indeksy wrażliwości wskazują, że największy wpływ na jego kształtowanie się ma parametr ρ_r z postaci strukturalnej, odpowiedzialny za 53% całkowitej jego zmienności. W dalszej kolejności znaczący wpływ mają również parametry θ_p oraz γ_y, wyjaśniające odpowiednio 33% i 12% zmienności współczynnika postaci zredukowanej.

Analogiczne rozważania dla równania stopy procentowej w postaci zredukowanej modelu (nieprezentowane na rysunkach) prowadzą do wniosku, że współczynnik przy zakłóceniu monetarnym ε_t^z jest kształtowany przez parametry θ_p, ρ_r, σ oraz γ_y, które wyjaśniają odpowiednio 29%, 22%, 18% oraz 16% jego zmienności. Znikomy wpływ ma parametr θ_w, około 1%. Współczynnik przy opóźnionej stopie procentowej jest kształtowany głównie przez parametr ρ_r, dla którego indeks wrażliwości wynosi 53%, oraz przez parametry θ_p, σ oraz γ_y, dla których otrzymujemy odpowiednio 18%, 11% oraz 10%. Zaprezentowana krótka analiza pozwala stwierdzić, że w rozważanym modelu równowagi ogólnej istotne z perspektywy analiz ekonomicznych parametry postaci zredukowanej są kształtowane przez zaledwie kilka parametrów postaci strukturalnej. Omawiany model stanowił przedmiot analiz we wcześniejszej pracy [Wróbel-Rotter 2012a]. Wskazano w niej, że parametr θ_p jest trudno identyfikowalny, obserwowana była wrażliwość oceny punktowej i rozkładu *a posteriori* na zmianę rozkładu *a priori*, ujawniały się też problemy ze zbieżnością oraz stabilnością numeryczną.

Analiza efektów głównych wskazuje, że dodatnie wartości $f_i(\theta_i)$ implikują duże, co do wartości bezwzględnej, poziomy współczynnika postaci zreduko-



Rys. 1. Indeksy wrażliwości i składniki pierwszego rzędu dekompozycji funkcji dla współczynnika przy zakłóceniu monetarnym w równaniu inflacji postaci zredukowanej

Źródło: opracowanie własne.

wanej, i ma charakter poglądowy. Duże wartości parametru strukturalnego ρ_r oraz małe dla θ_p implikują wysokie, co do wartości bezwzględnej, wartości współczynnika postaci zredukowanej w równaniu inflacji, znajdujące się przy zakłóceniu monetarnym ε_t^{ζ} . Niewielkie wartości ρ_r oraz znaczne dla θ_p implikują bliskie zera wartości współczynnika postaci zredukowanej. Współczynnik ten jest podstawą do budowy funkcji odpowiedzi impulsowych, stąd jego istotne znaczenie dla wniosków ekonomicznych wynikających z modelu, w szczególności dotyczących siły i kierunku oddziaływania szoków. Analogiczna interpretacja dotyczy współczynnika przy opóźnionej stopie procentowej w równaniu inflacji, którego duże poziomy korespondują z dużymi wartościami parametru strukturalnego ρ_r oraz małymi dla θ_p. W równaniu dla stopy procentowej znaczne wartości współczynników przy opóźnionej stopie procentowej oraz zakłóceniu monetarnym korespondują z dużymi wartościami parametru strukturalnego ρ_r oraz małymi dla θ_p. Niskie wartości ρ_r oraz wysokie θ_p implikują niskie co do wartości bezwzględnej, bliskie zera, wartości tych współczynników. Kluczowe parametry postaci zredukowanej stanowiące podstawę do konstrukcji charakterystyk ekonomicznych modelowej gospodarki są kształtowane przez zaledwie kilka parametrów postaci strukturalnej, w szczególności przez θ_p, ρ_r oraz γ_y. Zaprezentowana metodologia pozwala w praktyce na ogólne określenie dynamicznej relacji łączącej wybrane parametry postaci zredukowanej z parametrami postaci strukturalnej, a w szczególności określenie istniejącego w modelu związku inflacji ze stopą procentową i szokiem monetarnym oraz relacji łączącej bieżącą stopę procentową z jej opóźnieniami i szokiem monetarnym.

7. Podsumowanie

Praca przedstawia zastosowanie metod dekompozycji funkcji do analizy nieznanego i nieliniowego związku między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej estymowanego modelu równowagi ogólnej. Dekompozycja funkcji pierwszego rzędu jest traktowana jako model regresji zależnej od stanu, który estymuje się technikami nieparametrycznymi, opartymi na filtrowaniu i wygładzaniu uzyskanej z symulacji Monte Carlo próbki losowej. Oszacowane elementy dekompozycji funkcji służą budowie indeksów wrażliwości, informujących o wpływie każdego z parametrów strukturalnych na wybrany parametr postaci zredukowanej. Uzyskane rezultaty dostarczają ogólnego opisu zależności między parametrami strukturalnymi a kluczowymi parametrami postaci zredukowanej, determinującymi charakterystyki ekonomiczne uzyskiwane na podstawie modelu.

Literatura

Adjemian S. *et al*. [2011], *Dynare: Reference Manual*, *Version 4*, Dynare Working Papers 1.
Berliant M., Dakhlia S. [1997], *Sensitivity Analysis for Applied General Equilibrium Models in the Presence of Multiple Equilibria*, GE, Growth, Math Methods 9709003, EconWPA.
Erceg C.J., Henderson D.W., Levin A.T. [2000], *Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts*, „Journal of Monetary Economics", vol. 46, nr 2.
Härdle W. [1994], *Applied Nonparametric Regression*, Springer, Berlin.
Osidele O.O., Beck M.B. [2004], *Food Web Modelling for Investigating Ecosystem Behaviour in Large Reservoirs of the South-eastern United States: Lessons from Lake Lanier*, *Georgia*, „Ecological Modelling", vol. 173, nr 2–3.
Rabanal P., Rubio-Ramírez J.F. [2005], *Comparing New Keynesian Models of the Business Cycle: A Bayesian Approach*, „Journal of Monetary Economics", vol. 52, nr 6.
Ratto M. [2006], *Global Sensitivity Analysis for DSGE Models*, manuscript.
Ratto M. [2008], *Analysing DSGE Models with Global Sensitivity Analysis*, „Computational Economics", vol. 31, nr 2.
Ratto M. *et al*. [2004], *Accelerated Estimation of Sensitivity Indices Using State Dependent Parameter Models*, Proceedings of the 4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO 2004), Santa Fe, New Mexico, March 8–11.
Saltelli A. [2002], *Sensitivity Analysis for Importance Assessment*, „Risk Analysis", vol. 22, nr 3.
Saltelli A. *et al*. [2004], *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*, Wiley.
Saltelli A. *et al*. [2008], *Global Sensitivity Analysis*. *The Primer*, Wiley.
Sobol' I.M. [1993], *Sensitivity Analysis for Non-linear Mathematical Models*, Mathematical Modeling and Computational Experiment 1, English translation of Russian original paper by I.M. Sobol' (1990).
Sobol' I.M. [2003], *Theorems and Examples on High Dimensional Model Representation*, „Reliability Engineering and System Safety", vol. 79, nr 2.
Sobol' I.M. *et al*. [2007], *Estimating the Approximation Error when Fixing Unessential Factors in Global Sensitivity Analysis*, „Reliability Engineering and System Safety", vol. 92, nr 7.
Wasserman L. [2006], *All of Nonparametric Statistics*, Springer.
Wróbel-Rotter R. [2007a], *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation*, Modelling Economies in Transition 2006, ed. W. Welfe, P. Wdowiński, Łódź.
Wróbel-Rotter R. [2007b], *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, Folia Oeconomica Cracoviensia, vol. 48.
Wróbel-Rotter R. [2007c], *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, „Przegląd Statystyczny", nr 3, t. 54.
Wróbel-Rotter R. [2008], *Bayesian Estimation of a Dynamic General Equilibrium Model* [w:] *Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych*, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.

Wróbel-Rotter R. [2011a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 869, Kraków.
Wróbel-Rotter R. [2011b], *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Metody Analizy Danych, nr 873, Kraków.
Wróbel-Rotter R. [2011c], *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 872, Kraków.
Wróbel-Rotter R. [2012a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Metody Analizy Danych, nr 878, Kraków.
Wróbel-Rotter R. [2012b], *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 879, Kraków.
Wróbel-Rotter R. [2012c], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego*, część I: *Estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie*, Folia Oeconomica Cracoviensia 53.
Wróbel-Rotter R. [2012d], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego*, część II: *Wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej*, Folia Oeconomica Cracoviensia 53.
Wróbel-Rotter R. [2013a], *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia (złożone do druku).
Wróbel-Rotter R. [2013b], *Estymowane modele równowagi ogólnej i autoregresja wektorowa. Aspekty teoretyczne*, „Przegląd Statystyczny” t. 60, nr 3.
Wróbel-Rotter R. [2013c], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja. Aspekty praktyczne*, „Przegląd Statystyczny” t. 60, nr 4.
Wróbel-Rotter R. [2013d], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, „Bank i Kredyt” vol. 44, nr 5.
Wróbel-Rotter R. [2013e], *Hybrydowy model wektorowej autoregresji – analiza empiryczna funkcji odpowiedzi na zakłócenia strukturalne*, manuskrypt niepublikowany.
Young P.C. [2000], *Stochastic*, *Dynamic Modelling and Signal Processing: Time Variable and State Dependent Parameter Estimation* [w:] *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, ed. W.J. Fitzgerald, Cambridge University Press, Cambridge.

Empirical General Equilibrium Models: Application of High Dimensional Model Representation to Characterise the Relationship between Structural and Reduced Form Coefficients

The paper presents the application of high dimensional model representation to characterise the relationship between structural and reduced form coefficients of estimated general equilibrium models. The function representation is considered a state-dependent regression that is estimated non-parametrically, based on Monte Carlo sample, and generated from the probability distribution of structural parameters. The estimation method consists of recursive filtering and smoothing algorithms, derived from the

Kalman filter, enhanced with special data re-ordering, to capture strong variability of the parameters in the state-dependent regression. The estimated function decomposition is used to build sensitivity indices. The methodology presented is illustrated with an example from the literature.

Keywords: dynamic stochastic general equilibrium, sensitivity analysis, high dimensional model representation, Kalman filter, state-dependent auto-regression with exogenous variables.