

PORÓWNANIE BAYESOWSKICH MODELI COPULA-AR(1)-GARCH(1,1) Z ASYMETRYCZNOŚCIĄ ROZKŁADÓW WARUNKOWYCH

Justyna Mokrzycka¹

1. WSTĘP

Modelowanie powiązań i zależności pomiędzy aktywami finansowymi, z jednoczesnym uwzględnieniem charakterystycznych cech warunkowych rozkładów brzegowych tych aktywów oraz formalnym porównaniem proponowanych struktur zależności ma istotne znaczenie nie tylko teoretyczne, ale także praktyczne. Prognozowanie zmienności oraz dynamiki zależności pomiędzy procesami jest jednym z podstawowych zagadnień stochastycznego podejścia do wyceny instrumentów pochodnych, optymalizacji portfeli inwestycyjnych, kalkulacji wartości zagrożonej (*ang. Value at Risk*).

Podstawowym narzędziem ekonometrii finansowej, zarówno w analizach jednowymiarowych, jak i wielowymiarowych, jest proces GARCH (*ang. Generalised Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*) zaproponowany przez Borelsleva w 1986 roku jako uogólnienie procesu ARCH (*ang. Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*). W wyniku poszukiwań modeli lepiej opisujących dane finansowe powstały różnego typu uogólnienia i modyfikacje podstawowego procesu GARCH, są to m.in. EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH, IGARCH, FIGARCH, BEKK, DCC, a także Copula-GARCH [Fiszeder 2009]. Proces Copula-GARCH zaproponował Patton [2006b] oraz Jondeau i Rockinger [2006]. Specyfikacja tego procesu pozwala na ujęcie asymetrii w rozkładach warunkowych oraz asymetrii w strukturze zależności poprzez dobór odpowiedniej kopuli.

W niniejszym artykule przedmiotem rozważań będą dwuwymiarowe bayesowskie modele Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami brzegowymi: t-Studenta i skośnymi t-Studenta. W modelu Copula-GARCH wielowymiarowy rozkład wektora losowego definiowany jest z wykorzystaniem warunkowych kopul, które, w konsekwencji twierdzenia Skalara, mogą zostać uznane za funkcje określające strukturę zależności pomiędzy składowymi tego wektora. Z kolei warunkowe wartości

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Finansów i Prawa, Katedra Matematyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, justyna.mokrzycka@uek.krakow.pl

oczekiwane i wariancje rozkładów brzegowych w modelu opisywane są, odpowiednio, strukturą autoregresyjną i GARCH(1,1).

Głównym celem badań jest porównanie mocy wyjaśniającej modeli Copula-GARCH ze skośnym i symetrycznym rozkładem t-Studenta na przykładzie danych finansowych. Do estymacji i porównania modeli zastosowano podejście bayesowskie, które jest podejściem formalnym i całościowym. Weryfikację konieczności uwzględniania skośności rozkładów jednowymiarowych w przedmiotowym modelu przeprowadzono dla logarytmicznych stóp zwrotu notowań dwóch subindeksów indeksu WIG: WIG-Budownictwo, WIG-Informatyka. Charakterystyki próbkowe tych danych wskazują na występowanie asymetrii rozkładów brzegowych. Opracowano również metody Monte Carlo z funkcją ważności w kontekście stosowanych modeli.

Pierwszą pracą z zakresu bayesowskiego porównania modeli jest praca Huard, Evin i Favre [2006], w której przedstawiono wyniki bayesowskiego porównania wybranych 9 kopul proponując rozkład *a priori* bezpośrednio dla współczynnika tau Kendalla. Następnie Silva i Lopes [2008] zastosowali podejście bayesowskie do szacowania parametrów 6 wybranych kopuli, porównanie modeli opierało się na kryteriach informacyjnych m.in.: DIC, AIC, BIC. Publikacja Rossi, Ehlers, Filho [2012] prezentuje wyniki porównania 5 modeli Copula-GARCH z warunkowym brzegowym symetrycznym i skośnym rozkładem t-Studenta dla danych symulowanych, porównanie modeli opierało się na kryteriach informacyjnych m.in.: DIC, EAIC, EBIC. Praca Mokrzyckiej i Pajor [2016] przedstawia bayesowskie porównanie 11 modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym brzegowym rozkładem symetrycznym t-Studenta dla subindeksu indeksu WIG. W niniejszej pracy przedstawione zostaną wyniki bayesowskiego (opartego na prawdopodobieństwach *a posteriori* modeli) porównania modeli Copula-GARCH o różnych strukturach zależności oraz dwóch typach warunkowych rozkładów brzegowych z wykorzystaniem danych rzeczywistych.

Artykuł został podzielony na kilka części, w następnej przedstawiono bayesowski model Copula-AR(1)-GARCH(1,1). W kolejnej części omówiono estymację i porównanie modeli bayesowskich wraz z techniką bayesowskiego łączenia wiedzy. W części czwartej krótko przedstawiono sposób estymacji parametrów modelu z wykorzystaniem metody Monte Carlo z funkcją ważności. W części piątej zaprezentowano wyniki empiryczne dla wskazanych powyżej stóp zwrotu z okresu od 1.08.2005 r. do 21.09.2015 r.. Obliczenia wykonano z użyciem programu MATLAB2014

oraz opracowanych w tym programie autorskich procedur. Artykuł kończy podsumowanie.

2. BAYESOWSKI MODEL COPULA-AR(1)-GARCH(1,1)

Niech zbiór $Y \times Y_f \subset R^{(T+s) \times n}$ jest zbiorem możliwych realizacji badanego zjawiska. Wektor $(y, y_f) \in R^{(T+s) \times n}$ oznacza pojedynczą realizację tego zjawiska, przy czym $y \in R^{T \times n}$ jest wektorem zaobserwowanych wartości, natomiast $y_f \in R^{s \times n}$ wektorem wartości prognozowanych. Badane zjawisko opisane jest poprzez model statystyczny $(Y \times Y_f, F, P)$, gdzie F jest σ -algebrą podzbiorów zbioru $Y \times Y_f \subset R^{(T+s) \times n}$ (σ -algebrą zbiorów borelowskich); $P = \{P_\theta: \theta \in \Theta\}$ parametryczną rodziną rozkładów prawdopodobieństwa określonych na F o funkcjach gęstości $p(\cdot | \theta): Y \times Y_f \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ określonych na zbiorze możliwych realizacji badanego zjawiska. Następnie niech $p(\theta)$ będzie funkcją gęstości rozkładu wektora parametrów, czyli tzw. rozkładem *a priori*. Bayesowski model statystyczny jest jednoznacznie określony przez gęstość łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora zmiennych obserwowalnych, wektora wielkości prognozowanych oraz wektora parametrów [Osiewalski 2001]:

$$p(y, y_f, \theta) = p(y, y_f | \theta) p(\theta) = p(y_f | y, \theta) p(y | \theta) p(\theta).$$

Przejdźmy do specyfikacji procesu Copula-AR(1)-GARCH(1,1). Proces stochastyczny $\{y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})', t = 0, 1, 2, \dots, T\}$, jest procesem Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami t-Studenta, jeżeli spełnia następujące równania:

$$y_{i,t} = \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1} y_{i,t-1} + z_{i,t}, \quad (1)$$

$$z_{i,t} = \varepsilon_{i,t} \sqrt{h_{i,t}}, \quad (2)$$

$$h_{i,t} = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} z_{i,t-1}^2 + \beta_{i,1} h_{i,t-1}, \quad (3)$$

gdzie $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T, \alpha_{i,0} > 0, \alpha_{i,1} \geq 0, \beta_{i,1} \geq 0, \{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^T \sim iit(0, 1, v_i)$, czyli $\{\varepsilon_{i,t}, t = 1, 2, \dots, T\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie t-Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją i v_i stopniami swobody ($E(\varepsilon_{i,t}^2) = v_i / (v_i - 2), v_i > 2$). Natomiast łączny rozkład wektora $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$, zadany jest

poprzez kopulę o gęstości $c(u_1, u_2)$ [Patton 2006b, Jondeau i Rockinger 2006, Doman 2011, Mokrzycka i Pajor 2016].

W modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi skośnymi rozkładami t-Studenta $\{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^T \sim iiSt(0,1,v_i,\gamma_i)$, gdzie $St(0,1,v_i,\gamma_i)$ oznacza skośny rozkład t-Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją, v_i stopniami swobody oraz parametrem asymetrii γ_i .

Kopula to funkcja określona na kostce $[0, 1]^n$ o wartościach w przedziale $[0, 1]$, będąca obcięciem dystrybuanty n -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa o jednostajnych rozkładach brzegowych na przedziale $[0, 1]$ do kostki jednostkowej [Jaworski 2012, Durante i Sempi 2016, Doman 2011]. Podstawą do stosowania kopul w statystyce, a także w badaniach ekonometrycznych jest twierdzenie Sklara, który wykazał, że dla każdej n -wymiarowej dystrybuanty H istnieje taka kopula C , że zachodzi następująca równość $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, gdzie $F_1, \dots, F_n$ są dystrybuantami brzegowymi. Ponadto, jeśli dystrybuanty brzegowe są ciągłe, to kopula C wyznaczona jest jednoznacznie. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Sklara również jest prawdziwe, tzn. jeżeli C jest n -wymiarową kopulą, a $F_1, \dots, F_n$ są jednowymiarowymi dystrybuantami, to funkcja $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ jest n -wymiarową dystrybuantą, a $F_1, \dots, F_n$ jej dystrybuantami brzegowymi [Nelsen 1999, Jaworski 2012]. Z kolei rozszerzenie tego twierdzenia na rozkłady warunkowe, z warunkową kopulą, zostało przedstawione przez Pattona w 2006 r. Stosowanie twierdzenia z rozkładami warunkowymi jest możliwe w przypadku, gdy zbiór informacji względem, którego odbywa się warunkowanie jest taki sam dla warunkowej kopuli oraz warunkowych rozkładów brzegowych [Patton 2006b].

Warunkowa gęstość wektora $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ w modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami t-Studenta ma postać:

$$\begin{aligned} p_{\varepsilon}(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t} | \psi_{t-1}) = \\ c(t_{v_1}(\varepsilon_{1,t} | \psi_{t-1}), t_{v_2}(\varepsilon_{2,t} | \psi_{t-1}) | \psi_{t-1}) f_{St}(\varepsilon_{1,t}; 0, 1, v_1 | \psi_{t-1}) \times = \\ \times f_{St}(\varepsilon_{2,t}; 0, 1, v_2 | \psi_{t-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $t_v(\cdot)$ oznacza dystrybuantę jednowymiarowego rozkładu t-Studenta o zerowej modalnej, jednostkowej precyzji i v stopniach swobody, zaś $f_{St}(\cdot; 0, 1, v)$ jest gęstością tego rozkładu. Natomiast w przypadku zastosowania rozkładu skośnego t-Studenta dla $\varepsilon_{1,t}$ i $\varepsilon_{2,t}$ gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wektora ε_t ma postać:

$$\begin{aligned}
& p_{\varepsilon}(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t} | \psi_{t-1}) \\
& = c(t_{\nu_1, \gamma_1}(\varepsilon_{1,t} | \psi_{t-1}), t_{\nu_2, \gamma_2}(\varepsilon_{2,t} | \psi_{t-1}) | \psi_{t-1}) f_{St, \gamma_1}(\varepsilon_{1,t}; 0, 1, \nu_1, \gamma_1 | \psi_{t-1}) \\
& \times f_{St, \gamma_2}(\varepsilon_{2,t}; 0, 1, \nu_2, \gamma_2 | \psi_{t-1}) \quad (5)
\end{aligned}$$

gdzie $t_{\nu, \gamma}(\cdot)$ oznacza dystrybucję jednowymiarowego rozkładu skośnego t-Studenta o zerowej modalnej, jednostkowej precyzji, ν stopniach swobody ($\nu > 2$) i parametrze asymetrii $\gamma > 0$, zaś $f_{St, \gamma}(\cdot; 0, 1, \nu, \gamma)$ jest gęstością tego rozkładu i ma następującą postać [Osiewalski 2001, Pipień 2006]:

$$\begin{aligned}
& f_{St, \gamma}(x | \nu, \mu, h, \gamma) \\
& = \frac{2\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{(\gamma + \gamma^{-1})\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \sqrt{h^{-1}} [1 + (\nu h)^{-1}(x - \mu)^2 \{\gamma^2 I_{(-\infty, 0)}(x - \mu) \\
& + \gamma^{-2} I_{[0, \infty)}(x - \mu)\}]^{-0.5(\nu+1)}.
\end{aligned}$$

Z kolei łączny warunkowy rozkład wektora $(y_{1,t}, y_{2,t})'$ przy $\mu_{i,t} = \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}y_{i,t-1}$, $i = 1, 2$ jest następujący:

$$p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \psi_{t-1}) = p_{\varepsilon}((y_{1,t} - \mu_{1,t})/\sqrt{h_{1,t}}, (y_{2,t} - \mu_{2,t})/\sqrt{h_{2,t}} | \psi_{t-1})/\sqrt{h_{1,t}h_{2,t}}. \quad (6)$$

Wobec powyższego oznaczając przez $\theta = (\theta_G', \theta_c')' \in \Theta = \Theta_G \times \Theta_c \subset R^m$ wektor nieznanych parametrów modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1), gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji ma postać:

$$p(y | \theta_G, \theta_c) = \prod_{i=1}^T p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \psi_{t-1}), \quad (7)$$

przy czym θ_G oznacza wektor parametrów struktury AR(1)-GARCH(1,1), θ_c wektor parametrów kopuli.

W bayesowskim modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1), w którym nieznanne parametry traktowane są jako zmienne losowe, gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji i parametrów ma postać:

$$p(y, \theta_G, \theta_c) = p(y | \theta_G, \theta_c) p(\theta_G, \theta_c),$$

gdzie $p(\theta) = p(\theta_G, \theta_c)$ jest gęstością rozkładu *a priori* wektora θ , $p(y | \theta_G, \theta_c)$ jest tzw. gęstością próbkową macierzy obserwacji, która w przypadku analizowanego modelu w swojej postaci zawiera gęstość określonej warunkowej kopuli oraz gęstości warunkowych rozkładów brzegowych (por. równanie 7).

W dalszej części pracy przyjęto, że gęstość rozkładu *a priori* nieznanich parametrów modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) dla parametrów AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t-Studenta, czyli:

$\theta_G = (\varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \beta_{1,1}, \nu_1, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \beta_{2,1}, \nu_2)$, ma następującą strukturę $p(\theta_G) = p(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0})p(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}) \prod_{i=1}^2 p(\alpha_{i,0})p(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}) p(\nu_i)$, gdzie $p(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}) = f_{N,2}(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0} | (0,0)', I)$; $p(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}) = \frac{1}{4} I_{(-1,1)^2}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1})$; oraz dla $i=1,2$ $p(\alpha_{i,0}) = f_{Exp}(\alpha_{i,0} | \lambda_\alpha, \lambda_\alpha = 1)$; $p(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}) = \frac{1}{2} I_B(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1})$, $B = [0,1]^2 \cap \{(x,y)': x+y < 1\}$; $p(\nu_i) = \frac{1}{\sigma_\nu} \exp\left(-\frac{x-\mu_\nu}{\sigma_\nu}\right) I_{(\mu_\nu, \infty)}(\nu_i)$; $\mu_\nu = 2$; $\sigma_\nu = 8$; $E(\nu_i) = 10$.

Gęstość rozkładu *a priori* przyjęto zgodnie z badaniami prowadzonymi przez Pajor [2003] oraz Pipienia [2006]. Podobnie gęstość rozkładu *a priori* nieznanymi parametrów struktury AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta, czyli wektora parametrów:

$\theta_G = (\varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \beta_{1,1}, \gamma_1, \nu_1, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \beta_{2,1}, \gamma_2, \nu_2)$, ma postać:
 $p(\theta_G) = p(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0})p(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}) \prod_{i=1}^2 p(\alpha_{i,0})p(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}) p(\gamma_i)p(\nu_i)$, gdzie dodatkowo gęstość rozkładu *a priori* parametrów asymetrii γ_1 i γ_2 to gęstość rozkładu log-normalnego o parametrach $\mu = 0$, $\sigma = 1$ [Pipień 2006]. Natomiast gęstość rozkładu *a priori* dla parametrów kopuli zostały tak dobrane, by rozkład *a priori* dla współczynnika tau Kendalla był dość rozproszony [Mokrzycka i Pajor 2016]. Zestawienie tych rozkładów przedstawia Tabela nr 1.

Tabela 1. Zestawienie kopul stosowanych do specyfikacji modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) wraz ze wskazaniem przyjętych rozkładów *a priori* oraz podstawowymi charakterystykami dotyczącymi zależności

Kopula	Param. kopuli	rozkład <i>a priori</i>	tau Kendalla	Zależności w ogonach
Franka	$\theta \in R \setminus \{0\}$	$\theta \sim N(0, 100)$	$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta))$, gdzie $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$ funkcja Debye'a	$\lambda^U = 0, \quad \lambda^L = 0$
Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim Exp(1)$	$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta + 2}$	$\lambda^U = 0, \quad \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$
Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim Exp(1,1)I_{(1,+\infty)}$	$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}, \quad \lambda^L = 0$
Claytona-Gumbela (BB1)	$\theta > 0$ $\delta \geq 1$	$\theta \sim Exp(1),$ $\delta \sim Exp(1,1)I_{(1,+\infty)}$	$\tau_{\theta,\delta} = 1 - \frac{2}{(2+\theta)\delta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}, \quad \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\delta\theta}}$
Joe-go-Claytona (BB7)	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim Exp(1,1)I_{(1,+\infty)}$ $\gamma \sim Exp(1)$	$\tau_{\kappa,\gamma} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\gamma(\kappa-2)} - \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\gamma(\kappa-2)} B\left(\frac{2}{\kappa}, \gamma+1\right) & \kappa \neq 2 \\ 1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}(\psi(\gamma+2) - \psi(1)) & \kappa = 2 \end{cases}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\gamma}}$
Symetryzowana Joe-go-Claytona	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim Exp(1,1)I_{(1,+\infty)}$ $\gamma \sim Exp(1)$	---	$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\gamma'}}, \quad \lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\kappa'}}$
obrócona Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim Exp(1)$	$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta + 2}$	$\lambda^U = 2^{\frac{1}{\theta}}, \quad \lambda^L = 0$
obrócona Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim Exp(1,1)I_{(1,+\infty)}$	$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 0, \quad \lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
normalna	$\rho \in (-1, 1)$	$\rho \sim U(-1, 1)$	$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\lambda^U = 0, \quad \lambda^L = 0$
t-Studenta	$\rho \in (-1, 1),$ $v > 2$	$\rho \sim U(-1, 1)$ $v \sim Exp(2,8)I_{(2,+\infty)}$	$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\lambda^U = 2t_{v+1}(-\sqrt{v+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}) \quad \lambda^L = \lambda^U$

Źródło: opracowano na podstawie J. Mokrzycka, A. Pajor, 2016; „ $N(0,100)$ ” oznacza rozkład normalny o średniej 0 i odchyleniu standardowym 10; $Exp(1)$ rozkład wykładniczy z parametrem 1; $Exp(1,1)I_{(1,\infty)}$ rozkład wykładniczy na $(1, \infty)$ o parametrach $\mu = 1, \sigma = 1$.

3. ESTYMACJA I PORÓWNANIE MODELI BAYESOWSKICH

Podstawą wnioskowania w modelach bayesowskich są zasady rachunku prawdopodobieństwa oraz twierdzenie Bayesa. Estymacja parametrów modelu statystycznego polega na wyznaczeniu - z gęstości $p(y, \theta_G, \theta_c) = p(y|\theta_G, \theta_c)p(\theta_G, \theta_c)$ – rozkładu warunkowego wektora zmiennych losowych $\theta = (\theta_G, \theta_c)$ przy ustalonym wektorze obserwacji y , czyli tzw. rozkładu *a posteriori*:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y, \theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta)d\theta},$$

gdzie $p(y) = \int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta)d\theta$ jest brzegową gęstością wektora obserwacji. W modelu bayesowskim rozkład *a posteriori* łączy wstępną wiedzę badacza dotyczącą parametrów $\theta = (\theta_G, \theta_c)$ z informacją jaką niosą dane empiryczne, określaną przez gęstość $p(y|\theta)$ [Pajor 2003].

Porównanie konkurencyjnych modeli bayesowskich wymaga obliczenia, na podstawie wzoru Bayesa, prawdopodobieństwa *a posteriori* tych modeli [Osiewalski 2001]. Niech $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ będzie kompletnym zbiorem wzajemnie rozłącznych modeli bayesowskich: $M_i: p_i(y, \theta_{(i)}) = p_i(y|\theta_{(i)})p_i(\theta_{(i)})$, $i = 1, \dots, m$, gdzie $\theta_{(i)} \in \Theta$ jest wektorem parametrów modelu M_i . Prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu, wyznaczone na podstawie wzoru Bayesa, jest postaci:

$$p(M_i|y) = \frac{p(M_i)p(y|M_i)}{\sum_{j=1}^n p(M_j)p(y|M_j)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (8)$$

gdzie $p(M_i)$ to prawdopodobieństwo *a priori* modelu M_i , $p(y|M_i)$ to brzegowa gęstość macierzy obserwacji w modelu M_i : $p(y|M_i) = p_i(y) = \int_{\Theta} p_i(y|\theta_{(i)})p_i(\theta_{(i)})d\theta_{(i)}$. Model z najwyższym prawdopodobieństwem *a posteriori* uznawany jest za model najlepiej wyjaśniający dane empiryczne. Z kolei dobór prawdopodobieństw *a priori* modeli $p(M_i)$, sprowadza się najczęściej do przyjęcia, że są one jednakowe lub nadania wyższych prawdopodobieństw modelom o mniejszej liczbie parametrów, zgodnie z tzw. zasadą brzytwy Ockhama [Osiewalski 2001].

Jeżeli głównym celem badawczym jest wnioskowanie o parametrach wspólnych dla wszystkich modeli (np. wnioskowanie o współczynniku tau-Kendalla), możliwe jest pominięcie wyboru najbardziej prawdopodobnego modelu i zastosowanie techniki bayesowskiego łączenia wiedzy (*ang. Bayesian pooling approach*). Metoda sprowadza się do obliczenia średniej ważonej poszczególnych gęstości *a posteriori* wspólnych

parametrów z wagami równymi prawdopodobieństwom *a posteriori* modeli [Osiewalski, 2001]. Gęstość *a posteriori* dla wektora wspólnych parametrów λ ma wówczas postać: $p(\lambda|y) = \sum_{i=1}^n p(M_i|y)p_i(\lambda|y)$, gdzie $p(M_i|y)$ jest prawdopodobieństwem *a posteriori* obliczonym zgodnie ze wzorem (8), $p_i(\lambda|y)$ jest gęstością brzegowego rozkładu *a posteriori* wektora λ w modelu M_i . Zastosowanie bayesowskiego łączenia wiedzy pozwala na uwzględnienie zarówno niepewności co do wartości nieznanego parametru oraz, poprzez uśrednienie wiedzy o wspólnych parametrach, niepewności co do prawidłowej specyfikacji modelu w skończonej klasie modeli [Osiewalski 2001].

4. LOSOWANIE Z FUNKCJĄ WAŻNOŚCI

Wyznaczenie charakterystyk rozkładu *a posteriori* w modelu bayesowskim w jawnej postaci nie zawsze jest możliwe z uwagi na skomplikowaną postać gęstości rozkładu *a posteriori* tego rozkładu. Wobec tego do wyznaczenia tych charakterystyk stosuje się numeryczne metody całkowania, najbardziej rozpowszechnionymi w literaturze przedmiotu w kontekście wnioskowania bayesowskiego są metody Monte Carlo [Osiewalski 2001, Pajor 2003, Pipień 2006]. W przedmiotowej pracy z uwagi na niedużą liczbę parametrów zastosowano metodę Monte Carlo z funkcją ważności (*ang. Monte Carlo Importance Sampling*). Metoda ta była jedną z pierwszych metod stosowanych w ekonometrii bayesowskiej [Kloek i van Dijk 1978].

Ponieważ $p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\theta)p(\theta)d\theta}$, więc gęstość rozkładu *a posteriori* wektora parametrów modelu, θ , jest proporcjonalna do iloczynu $f(\theta) = p(y|\theta)p(\theta)$. Wyznaczenie charakterystyk rozkładu *a posteriori* wektora parametrów θ sprowadza się do obliczenia wartości oczekiwanych, względem rozkładu *a posteriori*, pewnych funkcji wektora θ [Osiewalski 2001, Pipień 2006]. Niech g oznacza tę funkcję, a s będzie gęstością pewnego rozkładu wówczas:

$$\begin{aligned} I = E(g(\theta)|y) &= \int_{\theta} g(\theta)p(\theta|y)d\theta = \frac{\int_{\theta} g(\theta)f(\theta)d\theta}{\int_{\theta} f(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\int_{\theta} g(\theta)\frac{f(\theta)}{s(\theta)}dS(\theta)}{\int_{\theta} \frac{f(\theta)}{s(\theta)}dS(\theta)} \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $dS(\theta)$ oznacza całkowanie względem absolutnie ciągłej miary probabilistycznej S określonej na σ -algebrze zbioru Θ , o dodatniej funkcji gęstości s [Pipień 2006]. Wobec

powyższego obliczenie szukanej wartości oczekiwanej I sprowadza się do obliczenia ilorazu dwóch wartości oczekiwanych względem znanej miary S , które to z kolei możemy estymować za pomocą średnich z próby. Estymator Monte Carlo wielkości I ma postać [Osiewalski 2001, Pipień 2006]:

$$\hat{I}_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(\theta^{(i)})f(\theta^{(i)})}{s(\theta^{(i)})}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\theta^{(i)})}{s(\theta^{(i)})}} = \frac{\sum_{i=1}^n g(\theta^{(i)})w(\theta^{(i)})}{\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})}, \quad (10)$$

gdzie $w(\theta) = \frac{f(\theta)}{s(\theta)}$ oznacza tzw. funkcję wagową.

Jeżeli funkcja f jest proporcjonalna do gęstości właściwego rozkładu prawdopodobieństwa oraz $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)} \in \Theta$ są losowane niezależnie z rozkładu o gęstości s oraz wartość oczekiwana $E(g|y)$ istnieje i jest skończona, to zachodzi zbieżność prawie wszędzie: $\hat{I}_n \rightarrow E(g|y), n \rightarrow \infty$ (estymator jest zgodny). Ponadto przy spełnieniu pewnych warunków podanych m.in. w pracy Geweke [1989] estymator ten jest asymptotycznie normalny.

Stosowanie metod Monte Carlo związane jest z obecnością błędów numerycznych. Standardowy błąd numeryczny metody Monte Carlo (*NSE ang. numerical standard error*) postaci $\hat{\phi}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g(\theta^{(i)}) - \hat{I}_n)^2 w(\theta^{(i)})^2}{(\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)}))^2}}$ powinien osiągać wartości zerowe. Estymator współczynnika RNE (ang. *relative numerical efficiency*, względnej efektywności numerycznej) postaci $\widehat{RNE} = \frac{1}{n\hat{\phi}_n^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^n g^2(\theta^{(i)})w(\theta^{(i)})}{\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})} - \hat{I}_n^2 \right]$ powinien przyjmować wartości bliskie jedynce, co zachodzi wówczas, gdy losowanie według funkcji ważności prawie nie różni się od losowania z rozkładu *a posteriori* [Osiewalski 2001]. Z kolei współczynnik zmienności funkcji wagowej $\gamma_n =$

$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w^2(\theta^{(i)})}{n} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{w(\theta^{(i)})}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})}}$ określa stosunek empirycznego odchylenia standardowego wartości wag do średniej wagi. Nieograniczony wzrost tego współczynnika wraz ze wzrostem liczby losowań, obserwowany w postaci nagłych skoków jego wartości, wskazuje na to, że dobrana funkcja ważności jest nieodpowiednia [Osiewalski 2001].

W zastosowaniach metody Monte Carlo dobór funkcji ważności jest bardzo ważny - im funkcja ważności lepiej przybliża jądro gęstości rozkładu *a posteriori* tym uzyskiwane realizacje „nieznacznie” różnią się od realizacji z rzeczywistego rozkładu

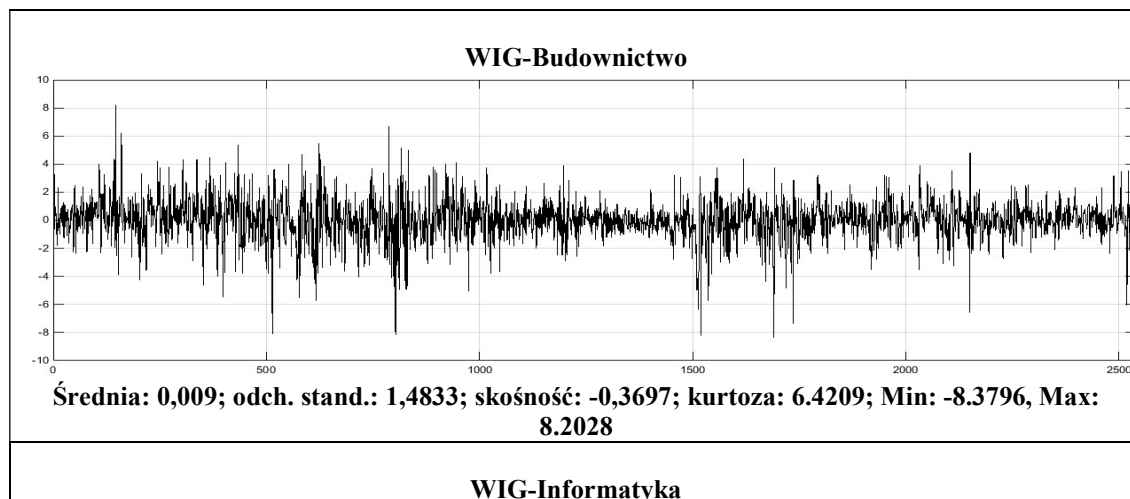
a posteriori, co skutkuje dobrymi aproksymacjami numerycznymi. W przedmiotowej pracy za funkcję ważności przyjęto wielowymiarowy rozkład t-Studenta z 3 stopniami swobody zgodnie z pracami Osiewalskiego [2001] i Pipienia [2006]. Parametry tego rozkładu (wektor średnich i macierz kowariancji) zostały oszacowane iteracyjnie na podstawie wstępnych 100 000 lub 1 mln przebiegów algorytmu.

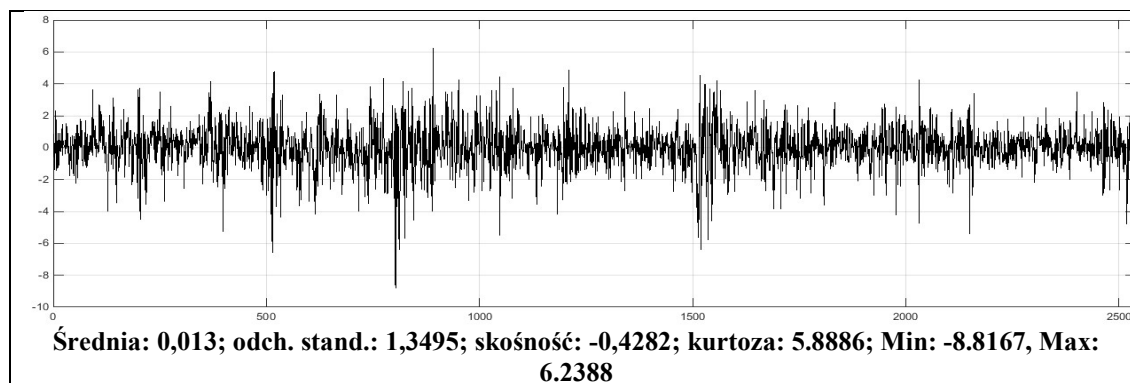
Stosowanie metody Monte Carlo z funkcją ważności znacznie upraszcza sposób szacowania wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji $p(y)$, gdyż jej estymatorem jest średnia arytmetyczna wag: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})$. Warto zaznaczyć, że stosowanie algorytmu Metropolisa-Hastingsa wymaga zastosowania bardziej czasochłonnych (obliczeniowo) estymatorów, np. skorygowanej średniej harmonicznej, estymatora Chiba i Jeliaskova, estymatora Laplace’a i Metropolisa, czy skorygowanej średniej arytmetycznej [Mokrzycka i Pajor 2016, Pajor 2017].

5. WYNIKI EMPIRYCZNE

Przedmiotem modelowania jest zmienność i struktura zależności dziennych, procentowych logarytmicznych stóp zwrotu, obliczonych na podstawie ceny zamknięcia subindeksów indeksu WIG: WIG-Budownictwo i WIG Informatyka w okresie od 1 sierpnia 2005 r. do 21 września 2015 r. Wybór tego okresu wynika z kontynuacji badań nad strukturą zależności dla subindeksów indeksu WIG przedstawionych w pracy Mokrzyckiej i Pajor [2016]. Liczba obserwacji (stóp zwrotu) szeregu subindeksów wyniosła 2539. Dane pochodziły z portalu www.stooq.pl. Wykresy oraz charakterystyki próbkowe logarytmicznych procentowych stóp zwrotu zawiera tabela nr 2.

Tabela 2. Wykresy oraz charakterystyki próbkowe logarytmicznych procentowych stóp zwrotu





Źródło: Opracowanie własne.

Wykresy analizowanych szeregów czasowych obrazują występowanie obserwacji nietypowych oraz obszarów skupiania się zmienności (*ang. volatility clustering*), czyli okresów o dużych co do wartości bezwzględnej stopach zwrotu, po których następują okresy o mniejszych wartościach stóp zwrotu. Wartość kurtოzy: 5,8886 i 6.4209 wskazuje na leptokurtyczność rozkładów empirycznych (duża koncentracja rozkładu wokół modalnej oraz występowanie grubych ogonów). Współczynniki skośności wskazują na występowanie lewostronnej asymetrii rozkładu. Wartości współczynnika korelacji liniowej oraz tau-Kendalla przedstawia tabela nr 3. Wartości te sugerują dodatnią zależność.

Tabela 3. Próbkowe współczynniki korelacji liniowych oraz tau-Kendalla

Dane	Współczynnik korelacji liniowej	Współczynnik tau-Kendalla
(WIGBUD, WIGINF)	0,5480	0,3384

Źródło: Opracowanie własne.

Wyniki zamieszczone w tabelach 4-6 przedstawiają wartości logarytmu naturalnego brzegowej gęstości *a posteriori* macierzy obserwacji ($\ln(p(y|M))$) oraz wartości prawdopodobieństwa *a posteriori* poszczególnych modeli, przy założeniu, że *a priori* modele są jednakowo prawdopodobne.

Tabela 4. Zestawienie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi brzegowymi rozkładami t-Studenta.

		(WIGBUD, WIGINF)		
Lp.	Kopula	$\ln(p(y M))$	p(M)	p(M y)
1	Franka	-8145,407	0,0909	0
2	Claytona	-8128,834	0,0909	0
3	Gumbela	-8149,97	0,0909	0
4	Claytona-Gumbela(BB1)	-8083,948	0,0909	0,71061
5	Joe-Claytona(BB7)	-8086,289	0,0909	0,06838
6	Symetryzowana Joe-Claytona	-8085,13	0,0909	0,2178

7	obrócona Claytona	-8128,838	0,0909	0
8	obrócona Gumbela	-8092,694	0,0909	0,00011
9	Normalna	-8105,155	0,0909	0
10	t-Studenta	-8089,383	0,0909	0,0031
11	zm. Niezależne	-8452,584	0,0909	0

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Zestawienie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi brzegowymi rozkładami **skośnymi** t-Studenta.

		(WIGBUD, WIGINF)		
Lp.	Kopula	$\ln(p(y M))$	$p(M)$	$p(M y)$
1	Franka	-8148,594	0,0909	0
2	Claytona	-8131,529	0,0909	0
3	Gumbela	-8157,282	0,0909	0
4	Claytona-Gumbela(BB1)	-8089,403	0,0909	0,7164
5	Joe-Claytona(BB7)	-8091,892	0,0909	0,0595
6	Symetryzowana Joe-Claytona	-8090,584	0,0909	0,2199
7	obrócona Claytona	-8228,252	0,0909	0
8	obrócona Gumbela	-8094,758	0,0909	0,0034
9	normalna	-8111,274	0,0909	0,0000
10	t-Studenta	-8096,188	0,0909	0,0008
11	zm. Niezależne	-8455,067	0,0909	0

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Zestawienie prawdopodobieństw *a posteriori* modeli („t” ozn. model z warunkowym brzegowym rozkładem t-Studenta, „t-sk” ozn. model z warunkowym brzegowym skośnym rozkładem t-Studenta).

		(WIGBUD, WIGINF)			
Lp.	Kopula		$\ln(p(y M))$	$p(M)$	$p(M y)$
1	Franka	t	-8145,407	0,0455	0
2		t-sk	-8148,594	0,0455	0
3	Claytona	t	-8128,834	0,0455	0
4		t-sk	-8131,529	0,0455	0
5	Gumbela	t	-8149,97	0,0455	0
6		t-sk	-8157,282	0,0455	0
7	Claytona-Gumbela(BB1)	t	-8083,948	0,0455	0,7076
8		t-sk	-8089,403	0,0455	0,0030
9	Joe-Claytona(BB7)	t	-8086,289	0,0455	0,0681
10		t-sk	-8091,892	0,0455	0,0003
11	Symetryzowana Joe-Claytona	t	-8085,13	0,0455	0,2169
12		t-sk	-8090,584	0,0455	0,0009
13	obrócona Claytona	t	-8128,838	0,0455	0
14		t-sk	-8228,252	0,0455	0
15	obrócona Gumbela	t	-8092,694	0,0455	0,0001
16		t-sk	-8094,758	0,0455	0,0000
17	normalna	t	-8105,155	0,0455	0
18		t-sk	-8111,274	0,0455	0
19	t-Studenta	t	-8089,383	0,0455	0,0031
20		t-sk	-8096,188	0,0455	0
21	zm. Niezależne	t	-8452,584	0,0455	0
22		t-sk	-8455,067	0,0455	0

Źródło: opracowanie własne.

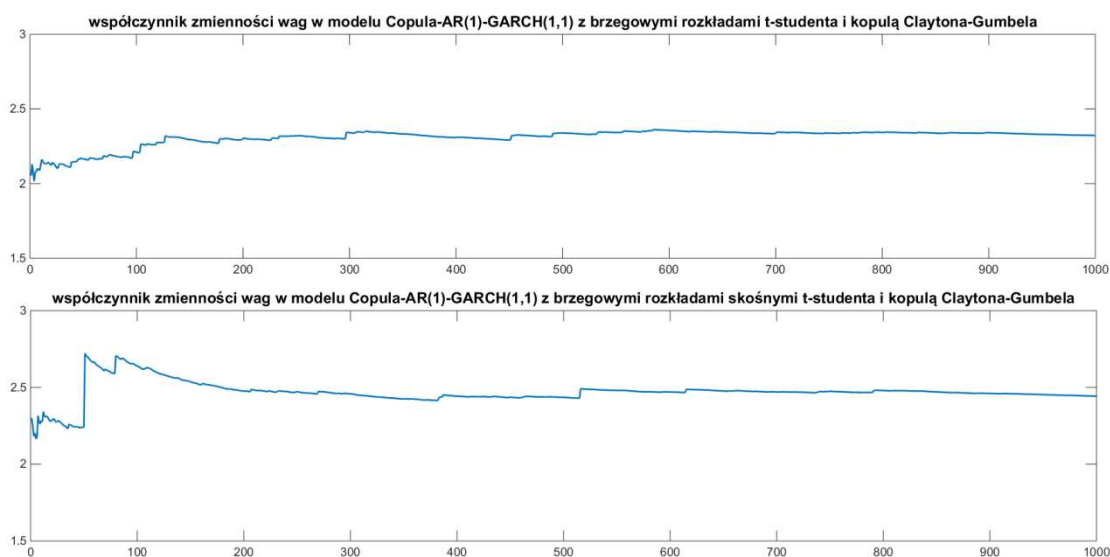
Wartości brzegowych gęstości *a posteriori* macierzy obserwacji zostały oszacowane z wykorzystaniem metody Monte Carlo (MC) z funkcją ważności (gęstością wielowymiarowego rozkładu t-Studenta z 3 stopniami swobody) z zachowaniem odpowiedniej korekty wartości z uwagi na restrykcje narzucone na wartości parametrów każdego z modeli [Osiewalski 2001]. Po ustaleniu charakterystyk funkcji ważności (wektora średnich i macierzy precyzji) wykonano 1 mln symulacji w ramach każdego modelu. W tabeli 4 i 5 zaprezentowano wyniki porównania 11 modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z odpowiednio warunkowym brzegowym rozkładem t-Studenta i warunkowym brzegowym skośnym rozkładem t-Studenta. Dla stóp zwrotu subindeksów WIG-Budownictwo i WIG-Informatyka najbardziej prawdopodobnym modelem okazał się model z kopułą Claytona-Gumbela. Model AR(1)-GARCH(1,1) z kopułą niezależną został zdecydowanie odrzucony przez dane. W tabeli 6 przedstawiono wyniki porównania wszystkich 22 modeli. Najwyższe wartości prawdopodobieństw *a posteriori* osiągnęły modele z brzegowym warunkowym symetrycznym rozkładem t-Studenta i kopułą Claytona-Gumbela. Niskie prawdopodobieństwo *a posteriori* modeli ze skośnym rozkładem t-Studenta potwierdza stwierdzenie zamieszczone w pracy Mokrzyckiej i Pajor [2016], że „na wartość współczynnika skośności mają wpływ obserwacje znajdujące się daleko w lewym ogonie” [Mokrzycka i Pajor 2016, s. 136].

Tabela 7. Charakterystyki *a posteriori* oraz NSE i RNE dla wartości oczekiwanych parametrów modeli

Parametr	Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami t-Studenta i kopułą Claytona-Gumbela (BB1)				Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi t-Studenta i kopułą Claytona-Gumbela (BB1)			
	E(y)	D(y)	NSE	RNE	E(y)	D(y)	NSE	RNE
$\varphi_{1,0}$	0,028	0,023	5,7E-05	0,1586	0,065	0,041	1,1E-04	0,144
$\varphi_{1,1}$	0,072	0,018	4,5E-05	0,1573	0,071	0,018	4,7E-05	0,141
$\alpha_{1,0}$	0,024	0,008	3,2E-05	0,0662	0,024	0,008	3,3E-05	0,067
$\alpha_{1,1}$	0,031	0,007	2,4E-05	0,0862	0,032	0,007	2,4E-05	0,085
$\beta_{1,1}$	0,931	0,016	5,7E-05	0,0760	0,929	0,016	6,0E-05	0,073
v_1	5,242	0,511	0,00149	0,1170	5,223	0,508	1,5E-03	0,114
$\varphi_{2,0}$	0,048	0,022	5,4E-05	0,1574	0,109	0,039	1,0E-04	0,148
$\varphi_{2,1}$	-0,043	0,018	4,6E-05	0,1564	-0,045	0,018	4,9E-05	0,136
$\alpha_{2,0}$	0,046	0,015	5,9E-05	0,0626	0,045	0,014	4,8E-05	0,091
$\alpha_{2,1}$	0,040	0,009	2,7E-05	0,1031	0,041	0,009	2,7E-05	0,102
$\beta_{2,1}$	0,896	0,024	9,1E-05	0,0692	0,895	0,023	7,6E-05	0,095
v_2	5,316	0,542	0,00157	0,1189	5,395	0,566	1,9E-03	0,092
θ_1	0,427	0,043	0,00011	0,1572	0,460	0,048	1,3E-04	0,135
θ_2	1,217	0,027	6,9E-05	0,1537	1,203	0,027	7,2E-05	0,141
γ_1	---	---	---	---	0,972	0,023	6,1E-05	0,138
γ_2	---	---	---	---	0,956	0,022	5,8E-05	0,147

Źródło: opracowanie własne. E(|y) – wartość oczekiwana, D(|y) – odchylenie standardowe

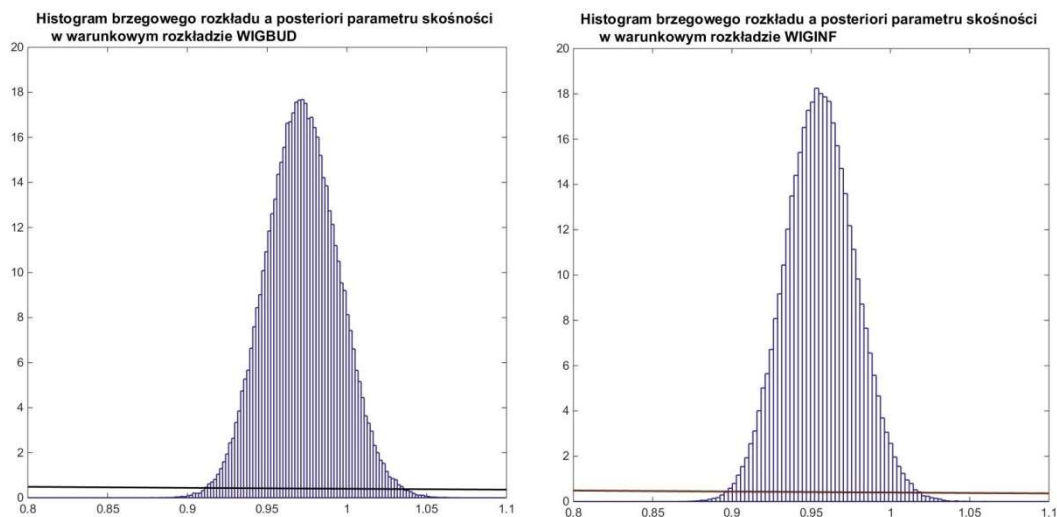
Rys. 1. Współczynniki zmienności wag w estymacji modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z kopułą Claytona-Gumbela(BB1)



Źródło: opracowanie własne

W tabeli 7 przedstawiono charakterystyki *a posteriori* dla wartości oczekiwanych parametrów najbardziej prawdopodobnych modeli oraz błędy numeryczne oszacowań (NSE i RNE). Rysunek nr 1 przedstawia współczynnik zmienności wag – na osi poziomej jako jednostkę przyjęto 1000 iteracji. Uzyskane i przedstawione błędy numeryczne w ocenie autorki są do zaakceptowania. Błąd NSE przyjmuje wartości bliskie zeru, a współczynniki zmienności wag γ_n nie wykazują nagłych dużych skoków wartości, jedynie RNE nie jest bliskie jedynce, co oznacza, że istnieje możliwość dobrania lepszej funkcji ważności, która efektywniej „typowałaby” obserwacje z faktycznego rozkładu *a posteriori*.

Rys. 2. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów asymetrii w modelu z kopułą Claytona-Gumbela. Linia ciągła gęstość rozkładu *a priori*.



Źródło: opracowanie własne.

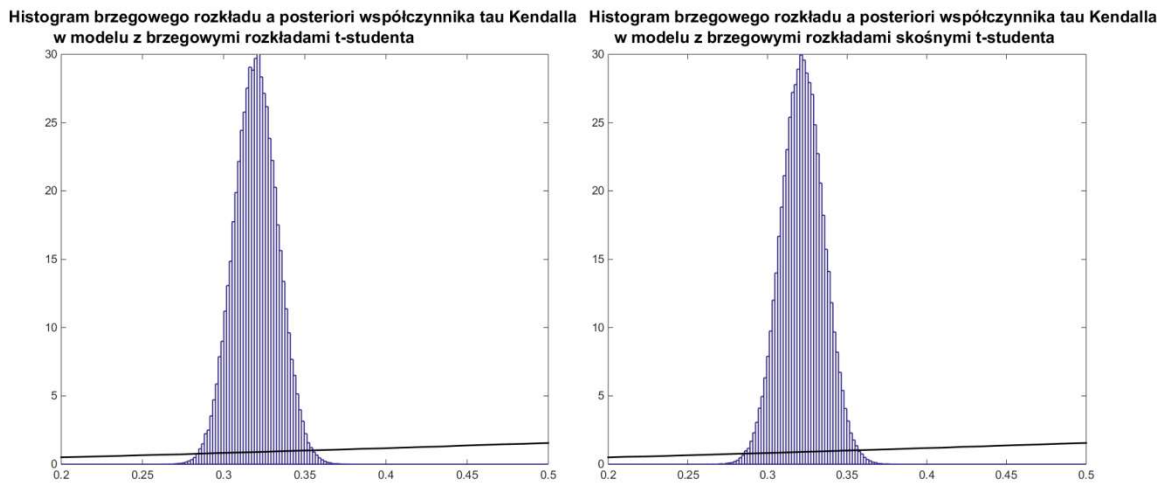
Na powyższych wykresach zaprezentowano histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* wraz z rozkładem *a priori* parametrów asymetrii γ_1 i γ_2 uzyskane w modelu z kopułą Claytona-Gumbela. Rozkłady tych parametrów są przesunięte nieco w lewo od 1, jedynka znajduje się w obszarze wysokich wartości funkcji gęstości rozkładu *a posteriori*.

Tabela 8. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (w nawiasach) *a posteriori* współczynnika tau Kendalla i zależności ogonowych

Kopuła	Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami t-Studenta			Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi t-Studenta		
	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L
Franka	0,3366 (0,0119)	0 (0)	0 (0)	0,3364 (0,0119)	0 (0)	0 (0)
Claytona	0,2706 (0,0106)	0 (0)	0,3927 (0,0197)	0,2828 (0,0116)	0 (0)	0,4150 (0,0209)
obrócona Claytona	0,2706 (0,0106)	0,3928 (0,0197)	0 (0)	0,2505 (0,0122)	0,3541 (0,0238)	0 (0)
Gumbela	0,3125 (0,0121)	0,3895 (0,0135)	0 (0)	0,3149 (0,0127)	0,3921 (0,0142)	0 (0)
obrócona Gumbela	0,3116 (0,0120)	0 (0)	0,3884 (0,0134)	0,3202 (0,0123)	0 (0)	0,3981 (0,0136)
Claytona-Gumbela(BB1)	0,3200 (0,0134)	0,2322 (0,0224)	0,2622 (0,0309)	0,3220 (0,0135)	0,2199 (0,0229)	0,2838 (0,0325)
Joe-go-Claytona (BB7)	0,3148 (0,0119)	0,2844 (0,0262)	0,3222 (0,0248)	0,3157 (0,0119)	0,2678 (0,0275)	0,3390 (0,0263)
Symetryzowana Joe-go-Claytona	—	0,2402 (0,0291)	0,3561 (0,0223)	—	0,2212 (0,0304)	0,3712 (0,0236)
Normalna	0,320 (0,0111)	0 (0)	0 (0)	0,3309 (0,0112)	0 (0)	0 (0)
t-Studenta	0,3288 (0,0123)	0,1669 (0,0401)	0,1669 (0,0401)	0,3283 (0,0123)	0,1621 (0,0404)	0,1621 (0,0404)

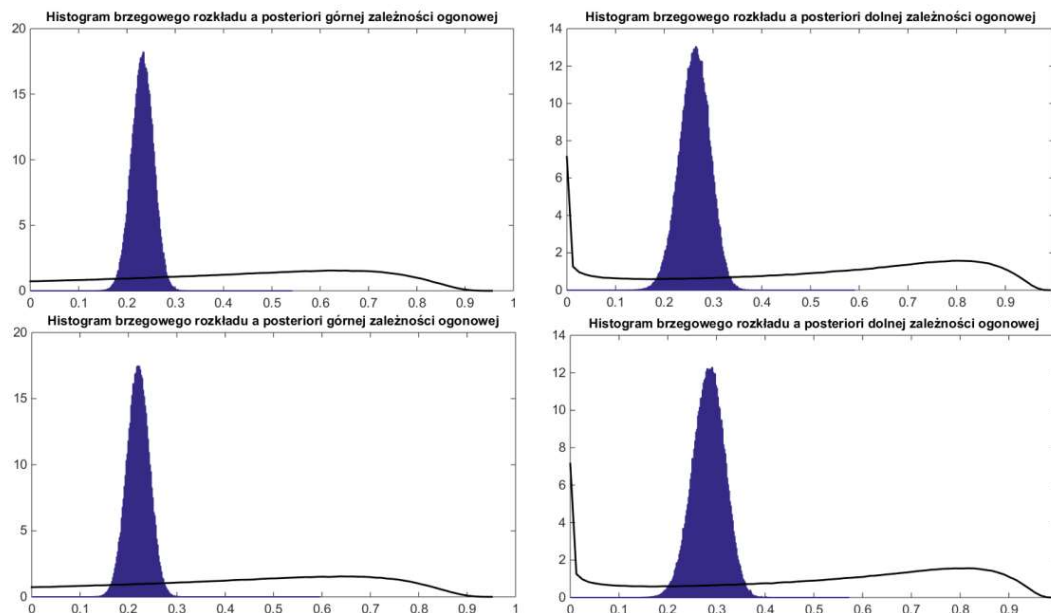
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* współczynnika tau Kendalla w modelu z kopułą Claytona-Gumbela (po lewej dla modelu z brzegowymi rozkładami t-Studenta, po prawej dla modelu z brzegowymi rozkładami skośnymi t-Studenta). Linia ciągła gęstość rozkładu *a priori*.



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 4. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* zależności ogonowych w modelu z brzegowymi rozkładami t-Studenta (wiersz pierwszy) i skośnymi t-Studenta (wiersz drugi) oraz kopułą Claytona-Gumbela (po lewej: górna, po prawej: dolna). Linia ciągła gęstość rozkładu *a priori*.



Źródło: opracowanie własne.

Charakterystyki rozkładów *a posteriori* współczynnika tau-Kendalla (przedstawione w tabeli 8) wskazują na dodatnią zależność, tj. prawdopodobieństwo realizacji wektora losowego uporządkowanego zgodnie jest wyższe niż prawdopodobieństwo niezgodnego uporządkowania tego wektora. Szacowanie zależności ogonowych dało wartości niezerowe, co oznacza niezerowe prawdopodobieństwo równoczesnego przyjmowania

wartości ekstremalnych. W modelu z kopułą Claytona-Gumbela na histogramach brzegowego rozkładu *a posteriori* zależności ogonowych (zob. rys. 4) widoczne jest nieznaczne przesunięcie rozkładu parametru dolnej zależności ogonowej w stosunku do rozkładu górnej zależności ogonowej. Wyższą wartość oczekiwaną *a posteriori* uzyskano dla dolnej zależności ogonowej.

Tabela 9. Wyniki bayesowskiego łączenia wiedzy dla parametrów wspólnych modeli

Parametr	Copula-AR(1)- GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami t-Studenta (11 modeli)		Copula-AR(1)- GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi t-Studenta (11 modeli)		Copula-AR(1)- GARCH(1,1) (22 modele)	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
$\varphi_{1,0}$	0,0284	0,0227	0,0648	0,0408	0,0285	0,0230
$\varphi_{1,1}$	0,0720	0,0177	0,0713	0,0177	0,0720	0,0177
$\alpha_{1,0}$	0,0233	0,0083	0,0242	0,0085	0,0233	0,0083
$\alpha_{1,1}$	0,0310	0,0070	0,0316	0,0070	0,0310	0,0070
$\beta_{1,1}$	0,9315	0,0158	0,9299	0,0160	0,9315	0,0157
ν_1	5,1495	0,5174	5,1366	0,5132	5,1494	0,5194
$\varphi_{2,0}$	0,0486	0,0215	0,1092	0,0388	0,0488	0,0219
$\varphi_{2,1}$	-0,0428	0,0181	-0,0451	0,0182	-0,0428	0,0181
$\alpha_{2,0}$	0,0455	0,0148	0,0455	0,0144	0,0455	0,0148
$\alpha_{2,1}$	0,0400	0,0086	0,0404	0,0086	0,0400	0,0086
$\beta_{2,1}$	0,8956	0,0240	0,8951	0,0235	0,8956	0,0239
ν_2	5,2286	0,5457	5,3144	0,5667	5,2289	0,5482
γ_1	---	---	0,9721	0,0228	---	---
γ_2	---	---	0,9557	0,0223	---	---
tau-Kendalla	0,2500	0,1324	0,2508	0,1337	0,2500	0,1324
λ^L	0,2865	0,0494	0,3066	0,0485	0,2866	0,0491
λ^U	0,2373	0,0280	0,2325	0,0352	0,2373	0,0278

Źródło: opracowanie własne. E(|y) – wartość oczekiwana, D(|y) – odchylenie standardowe

W tabeli 9 zamieszczono wyniki bayesowskiego łączenia wiedzy dla charakterystyk rozkładu *a posteriori* parametrów modelu. Zastosowanie tej techniki wpłynęło na obniżenie wartości współczynnika tau Kendalla oraz niewielkie zwiększenie wartości dolnej zależności ogonowej w stosunku do modelu o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori*.

6. PODSUMOWANIE

W pracy podjęto próbę modelowania zmienności i zależności pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi z wykorzystaniem modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi warunkowymi rozkładami t-Studenta i skośnymi t-Studenta oraz jedenastoma typami kopul. Do tego celu wykorzystano bayesowskie wnioskowanie statystyczne, które jest podejściem formalnym i całościowym. Z uwagi na

skomplikowane postaci gęstości rozkładów *a posteriori* charakterystyki tych 22 rozkładów, oszacowano stosując metodę Monte Carlo z funkcją ważności. Estymacja modeli została wykonana dla logarytmicznych, procentowych stóp zwrotu subindeksów: WIG-Budownictwo i WIG-Informatyka. W wyniku formalnego bayesowskiego porównania 22 modeli wytypowano model Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z kopułą Claytona-Gumbela i brzegowym, warunkowym, symetrycznym rozkładem t-Studenta jako model najlepiej opisujący stopy zwrotu subindeksów. W obu przypadkach analizowane modele Copula-GARCH z brzegowym warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta uzyskały wartości prawdopodobieństw *a posteriori* dużo niższe od modeli z symetrycznym rozkładem t-Studenta. Uzyskane wyniki potwierdziły, że próbkowa ujemna wartość współczynnika skośności dla zwrotu subindeksów wynika z występowania obserwacji nietypowych w lewym ogonie rozkładu.

Ponadto w pracy zaprezentowano także wyniki estymacji współczynnika tau Kendalla oraz zależności ogonowych zarówno dla poszczególnych 22 modeli jak również estymację tych wielkości z zastosowaniem techniki bayesowskiego łączenia wiedzy. Uzyskane wyniki wskazują na częstsze występowanie uporządkowania zgodnego niż niezgodnego w analizowanej parze składowych wektora losowego (dodatnia wartość współczynnika tau Kendalla) oraz występowanie asymetrycznej struktury zależności w ogonach rozkładów (kopuła Claytona-Gumbela).

Przedstawiona w pracy estymacja bayesowskich modeli Copula-GARCH oraz ich porównanie była kontynuacją badań prezentowanych w pracy Mokrzyckiej i Pajor [2016]. Kolejnym etapem badawczym będzie opracowanie dynamicznych modeli Copula-GARCH i ich formalne porównanie z modelami statycznymi lub MGARCH (ang. *Multivariate GARCH*). Następnie wykorzystanie tych modeli do szacowania wartości zagrożonej (ang. *Value at Risk*), oczekiwanego niedoboru (ang. *expected shortfall*) oraz oceny występowania efektu zarażania (ang. *contagion*) na rynkach finansowych.

LITERATURA

- Doman R. [2010], *Modelling the Dependencies Between the Returns on the Worsow Stock Indices Using Time Varying Copulas*, [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making*, W. Milo, P. Wdowiński, P. Szafrński (ed.), FindEcon Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis, No. 8 Łódź University Press, Łódź, 83-97.
- Doman R. [2011], *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Doman M., Doman R. [2014], *Dynamika zależności na globalnym rynku finansowym*, Difin SA, Warszawa.
- Durante F., Sempi C. [2016], *Principles of copula theory*, CRS Press, Taylor and Francis Group LLC.
- Fiszeder P. [2009], *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Geweke J. [1989], Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration, *Econometrica*, 57, 1317-1339.
- Huard D., Evin G., Favre A.C., [2006], Bayesian copula selection, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 809-822.
- Jaworski P. [2012], Wybrane zagadnienia modelowania zmienności na rynkach finansowych z wykorzystaniem kopuli i procesów GARCH, <http://docplayer.pl/1206688-Wybrane-zagadnienia-modelowania-zmienności-na-rynkach-finansowych-z-wykorzystaniem-kopuli-i-procesow-garch.html> (dostęp: 20.04.2017)
- Jondeau E., Rockinger M. [2006], The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application, *Journal of International Money and Finance*, 25, 827-853.
- Kloek T., Dijk H.K. van [1978], Bayesian Estimates of Equation System Parameters. An Application of Integration by Monte Carlo, *Econometrica*, 46 (1), 1-19.
- Mokrzycka J., Pajor A. [2016], Formalne porównanie modeli Copula-AR(1)-GRACH(1,1) dla subindeksów indeksu WIG, *Przegląd Statystyczny*, R. LXIII-Zeszyt 2, 123-148.
- Nelsen R.B. [1999], *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- Osiewalski J. [2001], *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Pajor A. [2003], *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Monografie: Prace Doktorskie, Nr 2, Wydawnictwo AE w Krakowie, Kraków.
- Pajor A. [2017], Estimating the Marginal Likelihood Using the Arithmetic Mean Identity, *Bayesian Analysis*, 12 (1), 261-287.
- Pipień M. [2006], *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Patton A.J. [2001], Modelling time varying exchange rate dependence using the conditional copula, *Discussion Paper 2001-09 University of California*, San Diego.
- Patton, A.J. [2006a], Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths, *Journal of Applied Econometrics*, 21 (2), 147-173.
- Patton A.J. [2006b], Modelling asymmetric exchange rate dependence, *International Economic*

Review, 47 (2), 527-556.

Rossi J.L., Ehlers R.S., Filho M.G.A., [2012], Copula-GARCH Model Selection: A Bayesian Approach, *Technical Report 88*, University of São Paulo.

Silva R., Lopes H.F., [2008], Copula marginal distributions and model selection: a Bayesian note, *Statistical Computing*, 18, 313-320.