Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

5 (965)

ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2017; 5 (965): 107–116
DOI: 10.15678/ZNUEK.2017.0965.0507

Jan Tatar

Zbieżność stochastyczna ciągów wektorów losowych*

Streszczenie

W artykule zaproponowano uogólnienie na przypadek wielowymiarowy dwóch twierdzeń, znanych dla zmiennych losowych jednowymiarowych, dotyczących zbieżności stochastycznej, czyli zbieżności według prawdopodobieństwa. Uogólnianymi twierdzeniami są słabe prawa wielkich liczb Markowa i Chinczyna. Wynika z nich, że przy odpowiednich założeniach ciąg średnich arytmetycznych wektorów losowych jest stochastycznie zbieżny do średniej arytmetycznej ich wartości oczekiwanych. W przeprowadzonych dowodach wykorzystano „łączne momenty rozkładów prawdopodobieństwa wektorów losowych" zaproponowane we wcześniejszych pracach autora. Opierają się one na definicji potęgi wektora w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

Słowa kluczowe: potęga wektora, moment rozkładu prawdopodobieństwa, wektor losowy, zbieżność stochastyczna.
Klasyfikacja JEL: C02, C10, C18, C32.

1. Wprowadzenie

W pracach [Tatar 1993, 1996b] zaproponowano odmienne od wcześniej stosowanego podejście do opisu wielkości losowych o charakterze wektorowym, tj. podejście, w którym charakterystyki rozkładów prawdopodobieństwa tych wiel-

Jan Tatar, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Finansów i Prawa, Katedra Matematyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, e-mail: tatarj@uek.krakow.pl

* Artykuł stanowi wynik realizacji projektu badawczego sfinansowanego ze środków przyznanych Wydziałowi Finansów i Prawa Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

kości (w szczególności ich momenty) są rzeczywiście charakterystykami wektorów losowych nie zaś – jak to ma miejsce w ujęciu klasycznym – jednowymiarowych zmiennych losowych będących funkcjami współrzędnych badanych wektorów. Punktem wyjścia prowadzonych w przywołanych pracach rozważań było zdefiniowanie nowego pojęcia, jakim jest potęga wektora w przestrzeni euklidesowej (lub ogólniej: w przestrzeni Hilberta). Umożliwiło ono sformułowanie definicji tzw. momentów łącznych (zarówno zwyczajnych, jak i centralnych) rozkładów prawdopodobieństwa wektorów losowych.

W wielu kolejnych pracach uogólniono na przypadek wielowymiarowy m.in. takie pojęcia, jak współczynnik korelacji [Tatar 2008a], momenty absolutne [Tatar 2001], miary zależności [Tatar 2008b], miary asymetrii [Tatar 2000], funkcje charakterystyczne oraz półniezmienniki [Tatar 2004, 2006], rozkłady warunkowe [Tatar 2009], regresja liniowa [Najman i Tatar 2010, Budny i Tatar 2012], czy wreszcie kurtoza oraz eksces [Budny 2009, Budny i Tatar 2009]. Sformułowano i udowodniono także wielowymiarowe wersje niektórych znanych w literaturze probabilistycznej twierdzeń, np. nierówność Czebyszewa [Tatar 1996a, Osiewalski i Tatar 1997, 1999, Budny 2014a, b], nierówność Lapunowa [Tatar 2002] czy wybrane słabe prawa wielkich liczb [Tatar 2003]. Zaproponowane łączne charakterystyki wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa wykorzystano także w opisie i badaniu wielkości ekonomicznych i finansowych [Tatar 2013, Budny i Tatar 2014, Budny, Szklarska i Tatar 2014].

W niniejszej pracy zaproponowano i udowodniono uogólnienie na przypadek wektorów losowych kolejnych dwóch twierdzeń z grupy słabych praw wielkich liczb, czyli tych, które mówią o stochastycznej (tj. według prawdopodobieństwa) zbieżności ciągów wektorów losowych. Będą to uogólnienia twierdzeń Markowa i Chinczyna. Ich postaci dla zmiennych losowych jednowymiarowych można znaleźć np. w pracach [Feller 1969, Fisz 1969, Plucińska i Pluciński 2000].

2. Podstawowe pojęcia

Niech dana będzie przestrzeń wektorowa $(R^n, R, +, \cdot)$, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny postaci $(\bullet \mid \bullet): R^n \times R^n \to R$.

Definicja 1 [Tatar 1993, 1996b]. Potęgą stopnia k, gdzie $k \in N_0 = N \cup \{0\}$, wektora $v \in R^n$ nazywamy wielkość v^k określoną następująco:

$$v^0 = 1$$

oraz

$$v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v, & \text{dla } k \text{ nieparzystej} \\ \left(v^{k-1} \mid v\right), & \text{dla } k \neq 0 \wedge k \text{ parzystej} \end{cases}$$

Z powyższej definicji wynikają w szczególności następujące własności:

(w.1) $\forall v \in R^n, k \in N_0 : k$ parzysta $\Rightarrow v^k \in R$,

(w.2) $\forall v \in R^n, k \in N : k$ nieparzysta $\Rightarrow v^k \in R^n$.

Jak wspomniano we wprowadzeniu, pojęcie potęgi wektora pozwoliło zdefiniować momenty wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa.

Niech zatem (Ω, S, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \Omega \to R^n$ będzie n-wymiarowym wektorem losowym o wartościach w R^n.

Definicja 2 [Tatar 1993, 1996b]. Dla dowolnej liczby $k \in N_0$ łącznym momentem zwykłym rzędu k wektora losowego ξ nazywamy wartość oczekiwaną $m_k = E(\xi^k)$, jeżeli $E\left(\left|\, \xi^k \right|\right) < +\infty$.

W szczególności: $m_0 = 1, m_1 = (m_{1(1)}, m_{1(2)}, \ldots, m_{1(n)}), m_2 = \sum_{i=1}^{n} m_{2(i)}$.

Symbolem $m_{r(i)}$ $(r \in N, i = 1, \ldots, n)$ oznaczamy w powyższych formułach moment zwykły rzędu r w rozkładzie brzegowym jednowymiarowej zmiennej losowej ξ_i.

Prawdziwe są implikacje:

(w.3) jeżeli k jest liczbą parzystą, to $m_k \in R$,

(w.4) jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to $m_k \in R^n$.

Definicja 3 [Tatar 1993, 1996b]. Momentem centralnym łącznym rzędu $k, (k \in N_0)$ wektora losowego ξ nazywamy wartość oczekiwaną $\mu_k = [E(\xi - m_1)^k]$, jeżeli spełniona jest nierówność $E\left(\left\| \xi - m_1 \right\|^k\right) < +\infty$.

W szczególności otrzymujemy: $\mu_1 = 0 \in R^n$, $\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{2(i)}$.

Symbolem $\mu_{2(i)}$ oznaczyliśmy moment centralny rzędu drugiego w rozkładzie jednowymiarowej zmiennej losowej ξ_i.

Centralny moment łączny rzędu drugiego nazywamy wariancją łączną wektora losowego ξ i oznaczamy przez $\sigma^2(\xi)$ lub $Var\,\xi$. Jest zatem: $\sigma^2(\xi) = \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{2(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, gdzie σ_i^2 $(i = 1, \ldots, n)$ oznacza wariancję rozkładu zmiennej brzegowej ξ_i.

Warto podkreślić, że przy przyjętych definicjach zachodzi równość: $\sigma^2(\xi) = m_2 - m_1^2$.

Pierwiastek kwadratowy z wariancji łącznej nazywamy łącznym odchyleniem standardowym rozkładu wektora losowego ξ i oznaczamy przez $\sigma(\xi)$. Jest więc $\sigma(\xi) = \sqrt{\sigma^2(\xi)} = \sqrt{Var\,\xi} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}$.

Inne wprowadzone wcześniej pojęcia, konieczne do zrozumienia prowadzonych w niniejszej pracy rozważań, zostaną przypomniane bezpośrednio przed prezentacją głównych rezultatów.

3. Uogólnione wersje słabych praw wielkich liczb

3.1. Uwagi ogólne

Na początku rozważań przypomnimy pojęcie stochastycznej zbieżności ciągu wektorów losowych (inaczej: zbieżności według prawdopodobieństwa), dla którego rezerwujemy symbol „ $\xrightarrow{p}$ ”.

Niech zatem $\xi_n, \xi\colon \Omega \to R^s, n = 1, 2, 3, \ldots$, będą wektorami losowymi oraz niech $c_n \in R^s, n = 1, 2, 3, \ldots$, oraz $c \in R^s$.

Definicja 4 (stochastyczna zbieżność ciągu wektorów losowych):

a) $\xi_n \xrightarrow{p} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\colon \lim\limits_{n \to \infty} P\left(\| \xi_n \| > \varepsilon\right) = 0,$

b) $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \xi_n - \xi \xrightarrow{p} 0,$

c) $\xi_n \xrightarrow{p} c_n \Leftrightarrow \xi_n - c_n \xrightarrow{p} 0,$

d) $\xi_n \xrightarrow{p} c \Leftrightarrow \xi_n - c \xrightarrow{p} 0.$

3.2. Uogólnione prawo Markowa

W dowodzie uogólnianego twierdzenia wykorzystamy wielowymiarową wersję nierówności Czebyszewa.

Twierdzenie 1 [Osiewalski i Tatar 1999]. Dla wektora losowego $\xi\colon \Omega \to R^s$ o skończonym drugim momencie zwyczajnym oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej $r > 0$ zachodzi nierówność $P\left[\| \xi - m_1(\xi) \| \geq r \cdot \sigma(\xi)\right] \leq \dfrac{1}{r^2}$.

Tezę twierdzenia 1 można także zapisać inaczej: $\forall \varepsilon > 0\colon P\left[\| \xi - m_1(\xi) \| \geq \varepsilon\right] \leq \dfrac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}$.

Twierdzenie 2 (uogólnione słabe prawo wielkich liczb Markowa). Niech $\xi_k\colon \Omega \to R^s(k = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie ciągiem s-wymiarowych wektorów losowych o wartościach oczekiwanych $m(\xi_k)$ oraz wariancjach $Var\, \xi_k$ spełniających warunek $Var\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = o\left(n^2\right)$. Wówczas: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k)) \xrightarrow{p} 0.$

Uwagi:

a) założenie $Var\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = o\left(n^2\right)$ oznacza, że $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} Var\, \xi_k = 0,$

b) tezę twierdzenia można także zapisać następująco:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m(\xi_k)$$

lub

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \lim_{n\to\infty} P\left[\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k))\right\| < \varepsilon\right] = 1.$$

Dowód. Określmy nowy ciąg $\{\eta_n\}$ wektorów losowych postaci $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wartość oczekiwana każdego wektora η_n jest postaci:

$$m(\eta_n) = E(\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m(\xi_k).$$

Wykorzystując powyższe ustalenia oraz uogólnioną nierówność Czebyszewa (por. twierdzenie 1), otrzymujemy – dla dowolnego $\varepsilon > 0$ – następujący ciąg zależności:

$$P\left[\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k))\right\| \geq \varepsilon\right] = P\left[\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m(\xi_k)\right\| \geq \varepsilon\right] =$$

$$= P\left[\left\|(\eta_n - m(\eta_n))\right\| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k))\right]}{\varepsilon^2} = \frac{Var\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n} m(\xi_k)\right]}{\varepsilon^2 \cdot n^2} =$$

$$= \frac{Var\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right]}{\varepsilon^2 \cdot n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot Var\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right].$$

Na mocy założenia oraz twierdzenia o trzech ciągach mamy zatem równość:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k))\right\| \geq \varepsilon\right] = 0,$$

czyli także

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m(\xi_k))\right\| < \varepsilon\right] = 1,$$

a więc żądana tezę.

Innymi słowy, wykazaliśmy stochastyczną zbieżność ciągu $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}$ do wektora $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m(\xi_k)$.

3.3. Uogólnione prawo Chinczyna

W tej części pracy wykorzystamy uogólnioną (wielowymiarową) postać funkcji charakterystycznej rozkładu prawdopodobieństwa zaproponowaną w pracy [Tatar 2004].

Definicja 5 [Tatar 2004]. Łączną funkcją charakterystyczną wektora losowego $\xi \colon \Omega \to R^s$ nazywamy funkcję $\varphi \colon R \to C$ postaci $\forall t \in R \colon \varphi(t) = E(e^{i \cdot t \cdot \xi})$.

Występującą w powyższej definicji wektorową potęgę dodatniej liczby rzeczywistej a rozumiemy (por. także [Tatar 2004]) jako każde odwzorowanie postaci:

$$d: V \times R_+ \to R_+$$

spełniające warunki:

(i) $d(e_+, a) = 1$,

(ii) $\forall v, w \in V: d(v+w, a) = d(v,a) \cdot d(w,a)$,

(iii) $\forall v \in V, k \in R: d(k \cdot v, a) = [d(v,a)]^k$,

(iv) $\forall v, w \in V: d(w, d(v,a)) = a^{(v/w)}$.

W dowodzie głównego w tej części pracy twierdzenia użyteczne także będą następujące dwa lematy.

Lemat 1. Niech dany będzie wektor losowy $\xi: \Omega \to R^s$ o funkcji charakterystycznej φ_ξ. Niech ponadto $a \in R$ oraz $v_o \in R^s$. Wówczas funkcja charakterystyczna wektora losowego $\gamma = a \cdot \xi + v_o$ jest postaci $\varphi_\gamma(t) = e^{i \cdot t \cdot v_o} \cdot \varphi_\xi(a \cdot t)$.

Dowód. Wykorzystując przypomnianą powyżej definicję 5 oraz własności wartości oczekiwanej, otrzymujemy:

$$\varphi_\eta(t) = E(e^{i \cdot t \cdot \eta}) = E(e^{i \cdot t \cdot (a \cdot \xi + v_o)}) = E(e^{i \cdot t \cdot a \cdot \xi} \cdot e^{i \cdot t \cdot v_o}) = e^{i \cdot t \cdot v_o} \cdot E(e^{i \cdot (a \cdot t) \cdot \xi}) = e^{i \cdot t \cdot v_o} \cdot \varphi_\xi(a \cdot t).$$

Lemat 2. Niech dane będą niezależne wektory losowe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n: \Omega \to R^s$ o funkcjach charakterystycznych $\varphi_{\xi_1}, \varphi_{\xi_2}, \ldots, \varphi_{\xi_n}$. Niech ponadto $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. Wówczas funkcja charakterystyczna wektora losowego $\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \xi_i$ jest postaci $\varphi_\gamma(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(a_i \cdot t)$.

Dowód. Z własności działania określonego w definicji 5 mamy:

$$\varphi_\gamma(t) = E(e^{i \cdot t \cdot (a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_2 + \ldots + a_n \cdot \xi_n)}) = E(e^{i \cdot t \cdot a_1 \cdot \xi_1} \cdot e^{i \cdot t \cdot a_2 \cdot \xi_2} \cdot \ldots \cdot e^{i \cdot t \cdot a_n \cdot \xi_n}).$$

Korzystając następnie z niezależności wektorów ξ_1, ξ_2 otrzymujemy:

$$\varphi_\gamma(t) = E(e^{i \cdot t \cdot a_1 \cdot \xi_1}) \cdot E(e^{i \cdot t \cdot a_2 \cdot \xi_2}) \cdot \ldots \cdot E(e^{i \cdot t \cdot a_n \cdot \xi_n}) = \varphi_{\xi_1}(a_1 \cdot t) \cdot \varphi_{\xi_2}(a_2 \cdot t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(a_n \cdot t),$$

czyli żądaną tezę.

Przechodzimy do sformułowania oraz dowodu twierdzenia będącego głównym wynikiem tej części pracy.

Twierdzenie 3 (uogólnione słabe prawo wielkich liczb Markowa). Niech $\xi_k: \Omega \to R^s$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie ciągiem niezależnych s-wymiarowych wektorów losowych o jednakowych rozkładach z wartością oczekiwaną $m = E(\xi_k) \equiv const$. Wówczas:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{p} m.$$

Dowód. Niech φ oznacza funkcję charakterystyczną wektora losowego $\xi_k - m$ (taką samą dla wszystkich $k = 1, 2, 3, \ldots$).

W tej sytuacji – wobec lematów 1 i 2 – funkcja charakterystyczna wektora losowego $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m)$ jest postaci:

$$\varphi_{\eta,n}(t) = \left[\varphi\left(\frac{1}{n}\cdot t\right)\right]^n.$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji φ w punkcie $\frac{1}{n}\cdot t$ w szereg Maclaurina, otrzymujemy:

$$\varphi_{\eta,n}(t) = \left[\varphi(0) + \varphi'(0)\cdot\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Z kolei, wobec własności funkcji charakterystycznej φ oraz jej pierwszej pochodnej φ' mamy:

$$\varphi_{\eta,n}(t) = \left[1 + E(i\cdot(\xi_k - m))\cdot\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

czyli

$$\varphi_{\eta,n}(t) = \left[1 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

a więc także

$$\ln\varphi_{\eta,n}(t) = n\cdot\ln\left[1 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right].$$

Wykorzystując powtórnie rozwinięcie funkcji w szereg Maclaurina (tym razem funkcji $f(z) = \ln(1+z)$, czyli $\ln(1+z) = z + o(z)$), otrzymujemy:

$$\ln\varphi_{\eta,n}(t) = n\cdot\left[o\left(\frac{t}{n}\right)\right].$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\ln\varphi_{\eta,n}(t) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[o\left(\frac{t}{n}\right)\right] = 0,$$

czyli także

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\eta,n}(t) = 1.$$

Skoro ciąg funkcji charakterystycznych $\{\varphi_{\eta,n}(t)\}$ zmierza do funkcji charakterystycznej rozkładu jednopunktowego skoncentrowanego w zerze, więc ciąg dystrybuant wektorów losowych $\{\eta_n\}$ jest zbieżny do dystrybuanty tego rozkładu (jednopunktowego skoncentrowanego w zerze). Wynika stąd, że ciąg wektorów losowych $\{\xi_k - m\}$ jest stochastycznie (tzn. według prawdopodobieństwa) zbieżny do zera. Oznacza to, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m) \xrightarrow{p} 0$, czyli $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{p} m$. Otrzymaliśmy więc tezę dowodzonego twierdzenia.

4. Podsumowanie

W pracy zaproponowano uogólnienie na przypadek wielowymiarowy dwóch twierdzeń (znanych dla zmiennych losowych jednowymiarowych) dotyczących zbieżności stochastycznej, czyli zbieżności według prawdopodobieństwa, tj. słabych praw wielkich liczb Markowa i Chinczyna. Twierdzenia te orzekają, że jeżeli ciąg wektorów losowych spełnia stosowne założenia, to ciąg ich średnich arytmetycznych jest zbieżny według prawdopodobieństwa do średniej arytmetycznej ich wartości oczekiwanych. W przeprowadzonych dowodach wykorzystano „łączne momenty rozkładów prawdopodobieństwa wektorów losowych", które – dzięki nowemu podejściu – są rzeczywiście charakterystykami wektorów losowych nie zaś jednowymiarowych zmiennych losowych będących funkcjami współrzędnych badanych wektorów.

Literatura

Budny K. [2009], *Kurtoza wektora losowego*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 78, seria: Ekonometria, nr 26.

Budny K., Tatar J. [2009], *Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions*, „Statistics in Transition – New Series", vol. 10, nr 3.

Budny K., Tatar J. [2012], *Regresja liniowa z wykorzystaniem nowej definicji momentów wektorów losowych*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie", nr 892.

Budny K., Szklarska M., Tatar J. [2014], *Wielowymiarowa analiza sytuacji społeczno-demograficznej Polski* [w:] *50 lat kształcenia ekonomistów w Kielcach*, red. E. Molendowski i A. Szplit, seria: Studia i Materiały. Miscellanea Oeconomicae, R. 18, nr 1, Kielce.

Budny K., Tatar J. [2014], *Charakterystyki wielowymiarowych wielkości finansowych oparte na definicji potęgi wektora* [w:] *Metody wnioskowania statystycznego w badaniach ekonomicznych*, red. J. Kolonko, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice.

Budny K. [2014a], *A Genaralization of Chebyshev's Inequality for Hilbert-space-valued Random Elements*, „Statistics and Probability Letters", vol. 88, https://doi.org/10.1016/j.spl.2014.01.021.

Budny K. [2014b], *An Extension of the Multivariate Chebyshev's Inequality to a Random Vector with a Singular Covariance Matrix*, „Communication in Statistics – Theory and Methods", vol. 45, nr 17, https://doi.org/10.1080/03610926.2014.941499.

Feller W. [1969], *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 1 i 2, PWN, Warszawa.

Fisz M. [1969], *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.

Najman P., Tatar J. [2010], *Regresja wektorów losowych dla wielowymiarowego rozkładu normalnego* [w:] *Badania ekonometryczne w teorii i praktyce*, red. A.S. Barczak, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.

Osiewalski J.,Tatar J. [1997], *Silna wersja uogólnionej nierówności Czebyszewa*, Materiały z XV Seminarium Naukowego im. Prof. Zbigniewa Pawłowskiego, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław.

Osiewalski J., Tatar J. [1999], *Multivariate Chebyshev Inequality Based on a New Definition of Moments of a Random Vector*, „Przegląd Statystyczny”, nr 2.

Plucińska A., Pluciński E. [2000], *Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa.

Tatar J. [1993], *Moments of a Random Variable in a Hilbert Space*, Discussion Paper, No. 1, Cracow Academy of Economics.

Tatar J. [1996a], *Nierówność Czebyszewa dla wielowymiarowych zmiennych losowych*, „Badania Operacyjne i Decyzje”, nr 2.

Tatar J. [1996b], *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*, „Przegląd Statystyczny”, nr 3–4.

Tatar J. [2000], *Asymetria wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Materiały z XVIII Seminarium Naukowego im. Prof. Zbigniewa Pawłowskiego, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.

Tatar J. [2001], *Momenty absolutne wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Sprawozdania z Posiedzeń Komisji Naukowych, PAN, Oddział w Krakowie, T. 43/2, Kraków (streszczenie).

Tatar J. [2002], *Nierówność Lapunowa dla wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie”, nr 549.

Tatar J. [2003], *Prawa wielkich liczb dla wielowymiarowych wektorów losowych* [w:] *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, red. W. Ostasiewicz, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.

Tatar J. [2004], *Funkcje charakterystyczne wielowymiarowych wektorów losowych*, Materiały z XXXVIII Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.

Tatar J. [2006], *Półniezmienniki i momenty w charakteryzacji wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa* [w:] *Matematyka – język uniwersalny. Księga jubileuszowa dla uczczenia 70. urodzin Profesora Tadeusza Stanisza*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Tatar J. [2008a], *Korelacja wektorów losowych o dowolnych wymiarach* [w:] *Postępy statystyki, ekonometrii i matematyki stosowanej w Polsce Południowej*, red. A. Zeliaś, J. Pociecha, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kraków.

Tatar J. [2008b], *Miary zależności wektorów losowych o różnych wymiarach*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 780.

Tatar J. [2009], *Nowe charakterystyki warunkowych rozkładów wielowymiarowych*, „Studia i Prace Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 3.

Tatar J. [2013], *Modele wskaźnikowe rynku kapitałowego wykorzystujące funkcję regresji wektorów losowych*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 923, https://doi.org/10.15678/ZNUEK.2013.0923.03.

Stochastic Convergence of Sequences of Random Vectors
(Abstract)

The paper presents a multidimensional generalisation (known for one-dimensional random variables) of two theorems regarding stochastic convergence – that is, convergence by probability. The generalised theorems are Markov's and Chinchyn's weak laws of great numbers. Both lead to the theory that, with the appropriate assumptions, a sequence of arithmetic averages of the random vectors converges their expected values to the arithmetic average. The proof for this thesis uses „whole moments of the multidimensional probability distribution", which the author has proposed elsewhere. Their basis is a definition of the power of a vector in a space with a scalar product.

Keywords: power of vector, moment of probability distribution, random vector, stochastic convergence.