

Michał Major

Karty kontrolne sum skumulowanych z możliwością akceptacji procesu. Przegląd podstawowych narzędzi

Streszczenie

Celem artykułu jest przegląd oraz analiza podstawowych kart kontrolnych sum skumulowanych, umożliwiających akceptację lub dyskwalifikację badanego procesu produkcyjnego. W literaturze przedmiotu można spotkać dwa rodzaje kart kontrolnych umożliwiających akceptację procesu – karty kontrolne Shewharta oraz karty kontrolne sum skumulowanych. Obydwie mogą być wykorzystywane przez menedżerów jakości lub menedżerów finansowych w trakcie monitorowania lub audytu procesu. W artykule omówiono wybrane procedury kontrolne oraz przedstawiono przykłady zastosowania opisanych rozwiązań.

Słowa kluczowe: statystyczna kontrola jakości, statystyczne sterowanie procesami, karty kontrolne akceptacji, karty kontrolne sum skumulowanych.

Klasyfikacja JEL: C12, C19, C44, L15.

1. Wprowadzenie

W gospodarce wolnorynkowej bardzo ważna jest możliwość monitorowania procesów ekonomicznych z punktu widzenia poziomu ich stabilności. W XX w. w dobie

dynamicznie rozwijającego się przemysłu i produkcji seryjnej podstawowym zadaniem była możliwość niezwłocznej identyfikacji momentu rozregulowania procesu produkcyjnego. Niezwykle pomocne w tym zakresie były stworzone w 1924 r. przez Waltera Shewharta (1891–1967) karty kontrolne. Umożliwiły one łatwą i szybką identyfikację momentu rozregulowania procesu i podjęcie koniecznej regulacji agregatu produkcyjnego. Procedury kontrolne zaproponowane przez W. Shewharta opierały się na klasycznej teorii weryfikacji hipotez statystycznych¹. Podobną rolę odegrały również karty kontrolne sum skumulowanych, oparte na sekwencyjnej weryfikacji hipotez statystycznych, której podstawy sformułowane zostały w pracach Abrahama Walda (1902–1950). Rozwój technik sum skumulowanych zawdzięczamy E.S. Page'owi z Uniwersytetu Cambridge, autorowi artykułu opublikowanego w czasopiśmie „Biomertika” w 1954 r. (zob. [Page 1954, s. 100–115]). Publikacja ta ukazała się 9 lat po publikacji A. Walda [1945, s. 117–186]. Podejście prezentowane przez A. Walda, a następnie E.S. Page'a stało w opozycji do klasycznego podejścia do weryfikacji hipotez J. Neymana i E. Pearsona [Neyman i Pearson 1933, s. 289–337]. Wspólną cechą kart kontrolnych Shewharta i kart kontrolnych sum skumulowanych – w ich pierwotnej postaci – jest to, że umożliwiają jedynie rejestrację sygnałów świadczących o destabilizacji (rozregulowaniu) procesu. Nie pozwalają natomiast na akceptację badanego procesu, czy inaczej, stwierdzenie, że jest on uregulowany. Wiąże się to z tym, że procedury te w pierwotnej formie zakładały tylko ryzyko zbędnej regulacji procesu (α) – określane w statystyce prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju. Pomijane lub też zerowane jest ryzyko błędu drugiego rodzaju (β). Efektem tego jest możliwość stwierdzenia rozregulowania procesu lub ogłoszenia braku podstaw do odrzucenia hipotezy o jego uregulowaniu. Obecnie ważna staje się nie tylko tolerancja przebiegu procesu, ale również możliwość jego akceptacji. Stąd też powstały opracowania przedstawiające modyfikacje klasycznych narzędzi i metod weryfikacji procesów. Dotyczyły one zarówno kart kontrolnych Shewharta (zob. [Iwasiewicz 1985, s. 57–86, 159–163; 1999, s. 239–242; 2001, s. 35–38; Major 2015b, s. 223–238], a także [PN-ISO 7966: 2001]), jak i kart kontrolnych sum skumulowanych (zob. [Major 1997, s. 47–54; Iwasiewicz 2008–2009, s. 71–90; 2011, s. 213–245; Major 2015a, s. 25–43; 2015b, s. 223–238]). O ile zmodyfikowane karty kontrolne Shewharta zostały już obszernie opracowane, o tyle ciągle za mało jest opracowań poświęconych zmodyfikowanym procedurom sum skumulowanym. Może to wynikać z tego, że wielu badaczy i użytkowników błędnie postrzega procedury sum skumulowanych jako narzędzia trudniejsze do zrozumienia, a tym samym do stosowania. Nie zmienia to jednak faktu, że pomimo pozornej komplikacji, dają one w wielu sytuacjach lepsze rezultaty niż

¹ Pod pojęciem klasycznych procedur weryfikacji hipotez statystycznych należy rozumieć procedury zaproponowane przez Jerzego Sławę Neymana oraz Egonę Pearsona.

karty kontrolne Shewharta. Ponadto, procedury sekwencyjne w wielu przypadkach generują znacznie mniejsze koszty kontroli niż ich odpowiedniki oparte na kartach kontrolnych Shewharta, a kwestia obniżki kosztów jest jedną z determinant konkurencyjności nowoczesnego przedsiębiorstwa.

Wymienione powyżej, a także inne merytoryczne kwestie stały się przesłanką do sformułowania celu niniejszego opracowania, jakim jest potrzeba rzetelnej i szczegółowej ilustracji tego typu procedur. Praca ta jest kontynuacją opracowań autora poświęconych procedurom kontrolnym z możliwością akceptacji procesu (zob. [Major 1997, s. 47–54; 2015a, s. 25–43; 2015b, s. 223–238]) oraz nawiązuje do wcześniejszych opracowań środowiska naukowego Katedry Statystyki Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

W artykule przedstawiono kilka najważniejszych kart kontrolnych sum skumulowanych. Opisane narzędzia reprezentują dwa warianty oceny przebiegu procesu produkcyjnego. Pierwszy z nich dotyczy sytuacji, gdy jakość produktu (wyrobu, usługi) lub procesu jest oceniana ze względu na zero-jedynkową zmienną diagnostyczną (tzw. alternatywna ocena właściwości). Proces oceniany w ten sposób nazywa się procesem binarnym (zob. [Iwasiewicz 2008–2009, s. 71–90; 2005–2006, s. 103–116; 2011, s. 213–245]). Z drugim wariantem oceny mamy do czynienia wówczas, gdy jakość produktu (wyrobu, usługi) lub procesu oceniana jest ze względu na ciągłą (quasi-ciągłą) zmienną diagnostyczną (tzw. liczbowa ocena właściwości). Ten typ procesu i jego oceny nazwano roboczo procesem ciągłym lub quasi-ciągłym.

2. Klasyczne procedury sekwencyjne

Teoria analizy sekwencyjnej sprowadza się do losowego pobierania pojedynczych lub małych zespołów zbiorowości generalnej oraz każdorazowego rozstrzygnięcia, czy zebrany zasób informacji pozwala na podjęcie określonej decyzji. Przy sformułowanej hipotezie zerowej H_0 i alternatywnej H_1 decyzje takie mogą dotyczyć:

- przyjęcia hipotezy H_0 ,
- odrzucenia hipotezy H_0 i przyjęcia hipotezy H_1 ,
- odłożenia decyzji do czasu pobrania następnej jednostki (próbki n) do próby m .

Postać hipotezy zerowej i alternatywnej zależy od charakteru badanej zmiennej losowej (stymulanta, destymulanta, nominanta) i ograniczenia przedziału tolerancji. Przyjmując, że weryfikowany parametr oznaczono symbolem Q , w tabeli 1 ujęto trzy ogólne zapisy weryfikowanych hipotez (wzory (1a) i (1b), (2a) i (2b), (3a), (3b) i (3c)).

Tabela 1. Weryfikowane hipotezy

Ograniczenie przedziału tolerancji / rodzaj zmiennej	Weryfikowane hipotezy
Prawostronne / destymulanta	$H_0: Q = Q_0$ (1a) $H_1: Q = Q_1$ (1b) $(Q_0 < Q_1)$
Lewostronne / stymulanta	$H_0: Q = Q_0$ (2a) $H_{-1}: Q = Q_{-1}$ (2b) $(Q_{-1} < Q_0)$
Dwustronne / nominanta	$H_0: Q = Q_0$ (3a) $H_1: Q = Q_1$ (3b) $H_{-1}: Q = Q_{-1}$ (3c) $(Q_{-1} < Q_0 < Q_1)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Wald 1945, Iwasiewicz 2008–2009].

Próba n jest w tym ujęciu sumą wszystkich próbek pobieranych w kolejnych k krokach, czyli:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k. \quad (4)$$

Jeżeli w każdym k -tym przedziale próbkowania liczebność próbki wynosi jeden, to wówczas liczność całej skumulowanej próby wyniesie $k(n = k)$.

Podczas każdego etapu badań obliczana jest wartość sekwencyjnego testu ilorazowego ogólnej postaci:

$$Q_k = \frac{\prod_{t=1}^n p_1(x_t | H_1)}{\prod_{t=1}^n p_0(x_t | H_0)}, \quad (5)$$

gdzie:

$p_1(x_t | H_1)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia losowego $X = x_t$, gdy założona jest prawdziwość hipotezy H_1 ,

$p_0(x_t | H_0)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia losowego $X = x_t$, gdy założona jest prawdziwość hipotezy H_0 ,

i sprawdzana jest prawdziwość nierówności:

$$A < Q_k < B, \quad (6)$$

gdzie:

$$A = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \text{ natomiast } B = \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Jeżeli $Q_k \leq A$, to przyjmuje się hipotezę H_0 z prawdopodobieństwem błędu nie większym niż β .

Gdy $Q_k \geq B$, wówczas należy przyjąć hipotezę H_1 z prawdopodobieństwem błędu nie większym niż α .

Natomiast gdy $A < Q_k < B$, to brak jest podstaw do podjęcia jednej z dwóch wymienionych powyżej decyzji i należy kontynuować badanie.

Postać sekwencyjnego testu ilorazowego (5) zależy od rodzaju zmiennej diagnostycznej X i charakteryzującego ją rozkładu prawdopodobieństwa. Zapisu wzoru (5) dokonano przy założeniu, że zmienna losowa X jest zmienną dyskretną. Wówczas wyrażenia stojące w tym wzorze należy interpretować jako funkcje rozkładu prawdopodobieństwa. W przypadku ciągłych zmiennych losowych wyrażenia we wzorze (5) są odpowiednimi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa. Jest to więc stosunek dwóch funkcji wiarygodności otrzymanych na podstawie próby, które zostały wyznaczone przy założeniu prawdziwości hipotezy H_1 (licznik) i prawdziwości hipotezy H_0 (mianownik). W tabeli 2 zostały zestawione wzory ilorazu (5) dla najczęściej wykorzystywanych rozkładów zmiennej diagnostycznej.

Tabela 2. Sekwencyjny test ilorazowy Q_k

Typ rozkładu zmiennej diagnostycznej	Sekwencyjny test ilorazowy Q_k
Dwumianowy $X \sim B(p; 1)$	$Q_k = \frac{\prod_{i=1}^n p_1^{x_i} q_1^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^n p_0^{x_i} q_0^{1-x_i}} \quad (q_1 = 1 - p_1; q_0 = 1 - p_0) \quad (7)$
Poissona $X \sim P(\lambda)$	$Q_k = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_1^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_1}}{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_0^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_0}} \quad (8)$
Normalny $X \sim N(\mu; \sigma)$	$Q_k = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma}\right)^2}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma}\right)^2}} \quad (9)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988].

W dalszej części artykułu przyjęto założenie, że zmienna diagnostyczna X jest zmienną dyskretną lub ciągłą o rozkładzie normalnym z przedziałem tolerancji ograniczonym prawostronnie². Jeżeli obserwowaną charakterystyką z próby jest suma realizacji zmiennej X , to w kolejnych krokach postępowania oblicza się wartość statystyki:

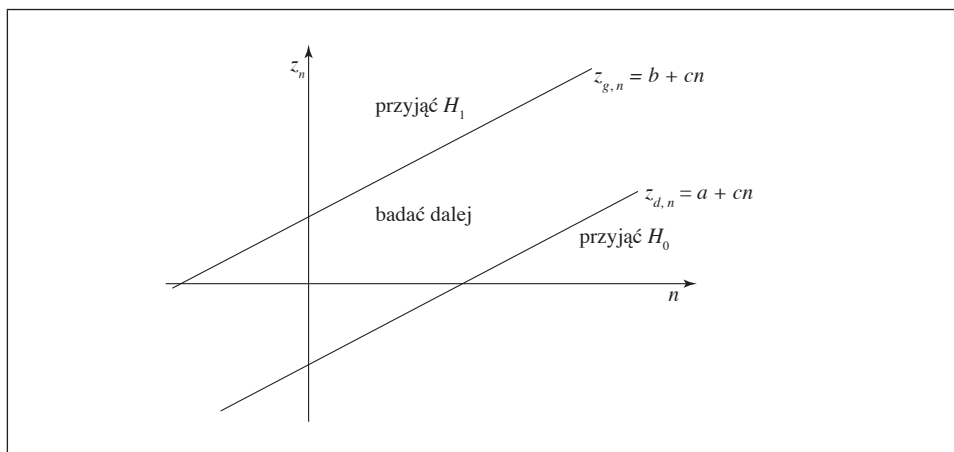
² W analogiczny sposób można zbudować procedury kontrolne dla zmiennych diagnostycznych ciągłych z przedziałem tolerancji ograniczonym lewostronnie lub dwustronnie. Szerzej zob. np. [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988].

$$z_t = \sum_{i=1}^t x_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots; t = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10)$$

Jeżeli w procesie weryfikacji hipotez stosowana jest graficzna wersja procedury kontrolnej, to wówczas obliczone wartości statystyki (10) według schematu:

$$t = 1: z_1 = x_1; t = 2: z_2 = z_1 + x_2; \dots; t = n: z_n = z_{n-1} + x_n, \quad (11)$$

nanosi się na diagram przeglądowy (wykres), przedstawiony schematycznie na rys. 1.



Rys. 1. Diagram przeglądowy klasycznej procedury sekwencyjnej przy prawostronnie ograniczonym przedziale tolerancji

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione na rys. 1 równania linii kontrolnych wynikają z nierówności (6) i powstają w wyniku jej przekształcenia³ do postaci:

$$z_{d,n} = a + cn < z_n < z_{g,n} = b + cn. \quad (12)$$

Wartości parametrów a , b i c zależą z kolei od przedstawionego w tabeli 2 rodzaju sekwencyjnego testu ilorazowego Q_k . Wzory opisujące te parametry zestawiono w tabeli 3.

Jeżeli w dowolnym kroku badania spełniona jest nierówność: $z_n \leq z_{d,n}$, wówczas przyjmuje się hipotezę H_0 (badany proces jest uregulowany), a prawdopodobieństwo tego, że prawdziwa jest hipoteza H_1 , nie przekracza β .

³ Dokładny proces przekształcenia nierówności (6) do postaci (12) czytelnik może znaleźć np. w pracy [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988, s. 36 i dalsze].

Jeżeli zachodzi nierówność: $z_n \geq z_{g,n}$, wówczas przyjmuje się hipotezę H_1 (badany proces jest rozregulowany), a prawdopodobieństwo tego, że prawdziwa jest hipoteza H_0 , nie przekracza α .

Tabela 3. Parametry linii kontrolnych dla klasycznej procedury sekwencyjnej

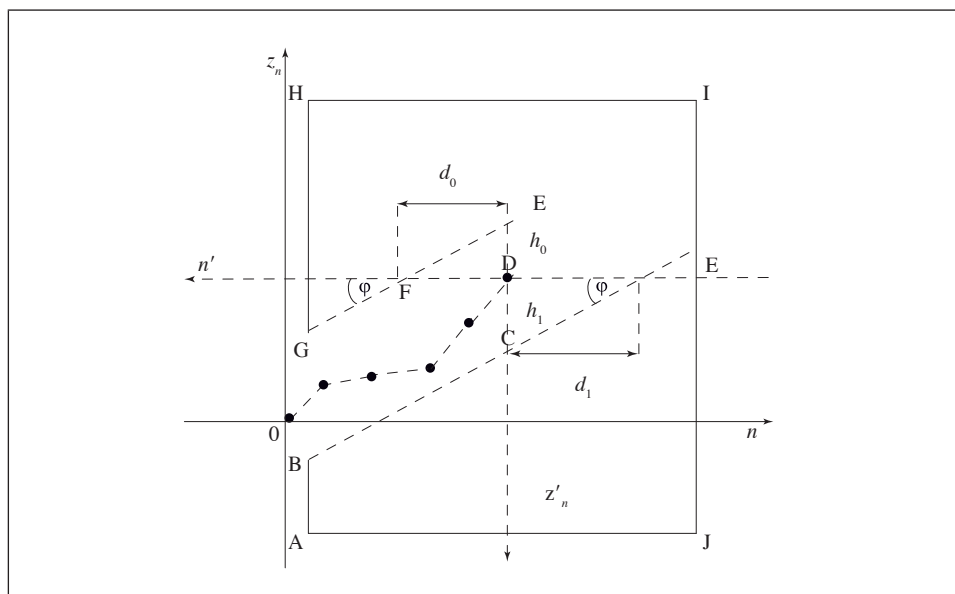
Typ rozkładu zmiennej diagnostycznej	Parametry linii kontrolnych
Dwumianowy	$a = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \quad (13)$
	$b = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \quad (14)$
	$c = \frac{\ln \frac{q_0}{q_1}}{\ln \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1}} \quad (15)$
Poissona	$a = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (16)$
	$b = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (17)$
	$c = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (18)$
Normalny (prawostronne ograniczenie przedziału tolerancji)	$a = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (19)$
	$b = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (20)$
	$c = \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \quad (21)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988].

Jeżeli natomiast: $z_{d,n} < z_n < z_{g,n}$, to nie ma podstaw do przyjęcia żadnej z hipotez i należy badać dalej proces, zwiększając liczebność próby o jeden, a następnie powtórnie obliczyć parametry $z_{d,n}$, $z_{g,n}$ i z_n .

3. Procedura sum skumulowanych z możliwością akceptacji procesu

Z uwagi na fakt, że zasady funkcjonowania klasycznej procedury sum skumulowanych można znaleźć w wielu pozycjach literatury z zakresu zarządzania jakością (zob. np. [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988, Montgomery 2009, s. 399–418]), w opracowaniu skupiono się tylko na zmodyfikowanej procedurze sum skumulowanych, umożliwiającej akceptację lub dyskwalifikację analizowanego procesu. Z formalnego punktu widzenia oznacza to, że zostanie uchylone założenie klasycznych kart kontrolnych sum skumulowanych głoszące, że ryzyko popełnienia błędu drugiego rodzaju $\beta = 0$, na rzecz założenia: $\beta > 0$. Niezmienne pozostaje założenie, że procedura sum skumulowanych jest klasyczną procedurą sekwencyjną realizowaną wstecznie. Oznacza to, że w każdym punkcie kończącym badaną sekwencję obserwacji wykreśla się pomocniczy układ współrzędnych obrócony w stosunku do pierwotnego o 180° . W każdym n -tym kroku postępowania bada się, czy zaobserwowany dotychczas ciąg obserwacji $z_n = \sum_{t=1}^n x_t$ wystarcza do przyjęcia jednej z dwóch weryfikowanych hipotez H_0 lub H_1 . W celu ułatwienia korzystania z tej metody konstruuje się tzw. maskownicę, którą przesuwa się na wykresie wraz ze wzrostem długości badanej sekwencji. Przykład takiej maskownicy przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Zmodyfikowana maskownica

Źródło: opracowanie własne.

Zmodyfikowana maskownica ma dwie czynne krawędzie (linie kontrolne), odcinki BC i GF. Podczas posługiwania się maskownicą ważna pozostaje zasada, żeby punkt D pokrywał się z ostatnim z punktów obserwowanej sekwencji oraz odcinek DE był równoległy do osi odciętych n .

Przekroczenie – przez choć jeden z punktów skumulowanej sekwencji – in minus dolnej linii maskownicy sugeruje konieczność przyjęcia hipotezy H_1 (proces jest rozregulowany) z ryzykiem błędu nie większym niż α . Gdy przekroczona zostaje in plus górna linia maskownicy, wówczas przyjmuje się hipotezę H_0 (proces jest uregulowany) z ryzykiem błędu nieprzekraczającym β . Natomiast jeżeli punkty skumulowanej sekwencji układają się w korytarzu pomiędzy czynnymi krawędziami maskownicy, to wówczas kontynuuje się badania, powiększając próbkę o kolejną wartość x_i .

Aby zbudować maskownicę, niezbędna jest znajomość (zob. rys. 2) parametrów d_0, d_1, h_0, h_1 oraz $c = \text{tg}\varphi$. Parametr d_0 uzyskuje się w wyniku przekształcenia równania dolnej linii kontrolnej $z_{d,n}$ klasycznej procedury sekwencyjnej (zob. rys. 1). Przekształcenie polega na wyznaczeniu miejsca zerowego n_0 funkcji $z_{d,n}$. Pamiętając, że maskownica funkcjonuje w układzie współrzędnym obróconym o 180° , można zapisać, że:

$$d_0 = -n_0. \quad (22)$$

W analogiczny sposób wyznacza się równanie parametru d_1 , przekształcając tym razem równanie górnej linii kontrolnej $z_{g,n}$. Równania parametrów d_0 i d_1 dla rozważanych przykładowych trzech typów rozkładów zmiennej losowej zestawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Równania parametrów maskownicy d_0 i d_1

Typ rozkładu	Parametry maskownicy
Dwumianowy	$d_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} \quad (23)$
	$d_1 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{q_0}{q_1}} \quad (24)$
Poissona	$d_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0} \quad (25)$
	$d_1 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_1 - \lambda_0} \quad (26)$

cd. tabeli 4

Typ rozkładu	Parametry maskownicy
Normalny (prawostronne ograniczenie przedziału tolerancji)	$d_0 = \frac{2\sigma^2 \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\mu_1^2 - \mu_0^2} \quad (27)$
	$d_1 = \frac{2\sigma^2 \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\mu_1^2 - \mu_0^2} \quad (28)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Iwasiewicz, Paszek i Steczkowski 1988].

Wartość parametru φ jest wyznaczana ze wzoru:

$$\varphi = \arctg c = \arctg \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}, \quad (29)$$

natomiast parametry h_0 i h_1 wynikają ze wzorów:

$$h_0 = d_0 \operatorname{tg} \varphi = d_0 c, \quad (30)$$

$$h_1 = d_1 \operatorname{tg} \varphi = d_1 c. \quad (31)$$

Wartości parametrów h_0 , h_1 oraz c są niezbędne podczas konstrukcji numerycznego algorytmu weryfikacji stanu procesu. W trakcie jego przebiegu można wyróżnić dwie sekwencje przebiegu procesu – jedna prowadzi do akceptacji procesu (przyjęcia hipotezy H_0), natomiast druga do jego dyskwalifikacji (przyjęcia hipotezy H_1). Założono dalej, że sekwencja punktów prowadząca do akceptacji procesu będzie nazywana „sekwencją A”, natomiast sekwencja prowadząca do dyskwalifikacji procesu – „sekwencją B”. W obydwu przypadkach weryfikowana jest wartość skumulowana statystyki z_n^* postaci:

$$z_n^* = \sum_{i=1}^s (x_{it} - c), \quad (32)$$

gdzie:

$c = \operatorname{tg} \varphi$,

t – indeks bieżący,

i – indeks operacyjny,

s – największa w danym momencie wartość indeksu operacyjnego ($s = 1, 2, 3, \dots$).

Indeks t we wzorze (32) funkcjonuje przez cały okres badań, natomiast moment uruchomienia licznika indeksu i zależy od rodzaju sekwencji punktów.

Analizę przebiegu procesu rozpoczyna się od śledzenia znaku różnicy $x_i - c$. W chwili gdy $x_i - c < 0$, zostaje uruchomiony licznik indeksu operacyjnego i ($i = 1$) oraz rozpoczyna się „sekwencja A” skutkująca wyznaczeniem wartości statystyki (32). Obliczanie tej statystyki jest kontynuowane tak długo, aż zostanie spełniony jeden z poniższych warunków:

$$1^A \quad z_n^* \leq z_d^*, \text{ gdzie } z_d^* = d_0 c = h_0, \quad (33)$$

$$2^A \quad z_n^* \geq 0. \quad (34)$$

W przypadku gdy spełniony jest warunek 1^A (33), badanie kończy się przyjęciem hipotezy zerowej H_0 z ryzykiem błędu nie większym niż β , natomiast gdy spełniony jest warunek 2^A (34), przerywa się obliczanie wartości charakterystyki z_n^* i powraca do śledzenia znaku różnicy $x_t - c$. Spełnienie warunku (33) lub (34) pociąga za sobą również konieczność wyzerowania indeksu i ($i = 0$).

Uruchomienie licznika indeksu operacyjnego i może również nastąpić, gdy $x_t - c > 0$. Jest to wówczas początek „sekwencji B”, a zarazem moment rozpoczęcia kumulacji zgodnie ze wzorem (32). Proces takiej kumulacji trwa do momentu, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

$$1^B \quad z_n^* \geq z_g^*, \text{ gdzie } z_g^* = d_1 c = h_1, \quad (35)$$

$$2^B \quad z_n^* \leq 0. \quad (36)$$

Spełnienie warunku 1^B (35) skutkuje przyjęciem hipotezy alternatywnej H_1 z ryzykiem błędu nie większym niż α . Spełnienie drugiego warunku 2^B (36) oznacza natomiast konieczność przerwania kumulacji i powrót do śledzenia znaku różnicy $x_t - c$. Podobnie jak w poprzednim przypadku spełnienie warunku 1^B lub 2^B skutkuje wyzerowaniem indeksu i ($i = 0$).

4. Przykłady zastosowania kart kontrolnych

Przykład 1

W trakcie produkcji materiałów bawełnianych monitorowano ich kurczliwość podczas prania. W tym celu wyprodukowane próbki materiału poddawano okresowo badaniom na kurczliwość. Podczas badania założono, że kurczliwość bawełny nie powinna przekraczać 7%⁴. Co można powiedzieć o przebiegu procesu wytwarzania materiałów, jeżeli dla 10 losowo wybranych próbek odnotowano wartości procentowej kurczliwości podane w tabeli 5?

Tabela 5. Procentowa kurczliwość materiałów bawełnianych

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t (%)	5	6	6	4,5	8	6,25	5	4	6	4,5

Źródło: dane umowne.

⁴ Według polskiej normy [PN-P-84004:2003] naturalna kurczliwość bawełny wynosi 6%.

Podczas analizy powyższego procesu założono, że: $\alpha = \beta = 0,05$ oraz że kurczliwość bawełny w praniu ma rozkład normalny ze stałą wariancją wynoszącą 1,5%.

Ponieważ zmienna diagnostyczna będąca procentową kurczliwością bawełny w praniu jest traktowana jako destymulanta jakości⁵ analizowanego procesu, hipoteza zerowa oraz hipoteza alternatywna będą miały postać:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 5\%, \quad H_1: \mu = \mu_1 = 7\%.$$

Korzystając ze wzorów (19), (20) i (21), wyznaczono wartości parametrów a , b i c niezbędne do zastosowania klasycznej procedury sekwencyjnej.

$$a = \frac{1,5^2}{7-5} \ln \frac{0,05}{0,95} = -3,31; \quad b = \frac{1,5^2}{7-5} \ln \frac{0,95}{0,05} = 3,31; \quad c = \frac{7+5}{2} = 6.$$

Równania linii kontrolnych przedstawiały się następująco:

$$z_{d,n} = -3,31 + 6n; \quad z_{g,n} = 3,31 + 6n.$$

W tabeli 6 zestawiono obliczenia robocze dla danych wejściowych podanych w tabeli 5. Obserwując wyniki zawarte w tabeli 6 można zauważyć, że w dziesiątym kroku postępowania sekwencyjnego, przy liczności skumulowanej próbki $n = 10$, należy przyjąć hipotezę zerową H_0 i proces produkcji materiału bawełnianego uznać za uregulowany. Prawdopodobieństwo tego, że ocena ta jest fałszywa, nie przekracza $\beta = 0,05$.

Tabela 6. Analiza procesu kurczenia materiałów bawełnianych za pomocą klasycznej procedury sekwencyjnej

t	n	x_t (%)	\bar{z}_n	$\bar{z}_{d,n}$	$\bar{z}_{g,n}$	Decyzja
1	1	5	5	2,69	9,31	badać dalej
2	2	6	11	8,69	15,31	badać dalej
3	3	6	17	14,69	21,31	badać dalej
4	4	4,5	21,5	20,69	27,31	badać dalej
5	5	8	29,5	26,69	33,31	badać dalej
6	6	6,25	35,75	32,69	39,31	badać dalej
7	7	5	40,75	38,69	45,31	badać dalej
8	8	4	44,75	44,69	51,31	badać dalej
9	9	6	50,75	50,69	57,31	badać dalej
10	10	4,5	55,25	56,69	63,31	przyjąć H_0

Źródło: obliczenia własne.

⁵ Im kurczliwość 100-procentowej bawełny jest mniejsza, tym jakość bawełny jest wyższa. Jednak w pewnych sytuacjach niska lub wręcz zerowa kurczliwość materiału może świadczyć o tym, że dzianiny mają domieszkę innego materiału, np. elanobawełny.

Podobną analizę można przeprowadzić stosując zmodyfikowaną procedurę sum skumulowanych. Należy wtedy obliczyć dodatkowo wartości parametrów d_0, d_1 oraz h_0, h_1 (zob. wzory (27), (28), (30) i (31)). Mamy wówczas:

$$d_0 = \frac{2 \cdot 1,5^2 \ln \frac{0,05}{0,95}}{7^2 - 5^2} = -0,55; \quad d_1 = \frac{2 \cdot 1,5^2 \ln \frac{0,95}{0,05}}{7^2 - 5^2} = 0,55;$$

$$h_0 = d_0 c = z_d^* = -3,31; \quad h_1 = d_1 c = z_g^* = 3,31.$$

Mając te parametry, można przystąpić do powtórnej analizy danych przy użyciu karty kontrolnej sum skumulowanych z możliwością akceptacji procesu. Jej przebieg przedstawiono w tabeli 7.

Tabela 7. Analiza procesu kurczenia materiałów bawełnianych za pomocą zmodyfikowanej procedury sum skumulowanych

t	i	x_{it}	n	$z_i^* = x_{it} - c$	z_n^*	Uwagi
1	1	5	1	-1	-1	$x_t < c$ (zacząć kumulację, $i = 1$)
2	2	6	2	0	-1	kumulować ($i = i + 1$)
3	3	6	3	0	-1	kumulować ($i = i + 1$)
4	4	4,5	4	-1,5	-2,5	kumulować ($i = i + 1$)
5	5	8	5	2	-0,5	kumulować ($i = i + 1$)
6	6	6,25	6	0,25	-0,25	kumulować ($i = i + 1$)
7	7	5	7	-1	-1,25	kumulować ($i = i + 1$)
8	8	4	8	-2	-3,25	kumulować ($i = i + 1$)
9	9	6	9	0	-3,25	kumulować ($i = i + 1$)
10	10	4,5	10	-1,5	-4,75	$z_n^* < z_d^*$ (przyjąć H_0)

Źródło: obliczenia własne.

Jak widać, zmodyfikowana procedura sum skumulowanych doprowadziła również do przyjęcia hipotez zerowej. Proces kumulacji rozpoczął się w okresie $t = 1$ i trwał nieprzerwanie do okresu $t = 10$.

Przykład 2

W trakcie badania jakości linek holowniczych sprawdzanych jest wiele parametrów pod względem ich zgodności z wytycznymi zawartymi w Prawie o ruchu drogowym (długość holu, umiejscowienie chorągiewki ostrzegawczej i kolor linki) oraz zgodności z warunkami technicznymi określonymi przez Przemysłowy Instytut Motoryzacji (PIMOT) WT/008/PIMOT/93 – „Linki holownicze. Wymagania i badania w zakresie bezpieczeństwa użytkownika”. Pod uwagę bierze się wówczas instrukcję użytkownika oraz wytrzymałość holu. W trakcie weryfikacji

wytrzymałości linki zakłada się, że (<http://federacja-konsumentow.org.pl/download/LINKI%202.doc>, data dostępu: 22.09.2016):

– linki holownicze przeznaczone do holowania pojazdów o masie do 1500 kg powinny bez uszkodzeń przenieść obciążenie nie mniejsze niż 1200 daN w czasie 20 s,

– linki holownicze przeznaczone do holowania pojazdów o masie większej niż 1500 kg powinny przenieść bez uszkodzeń obciążenie nie mniejsze niż masa holowanego pojazdu. Na przykład jeżeli masa pojazdu wynosi 2000 kg, to obciążenie badawcze linki holowniczej powinno wynieść nie mniej niż 2000 daN w czasie 20 s. Bardzo ważną kwestią jest także pomiar wytrzymałości granicznej do zerwania, podczas którego określa się poziom przyłożonej siły, przy której linka ulega zerwaniu. Linka holownicza z zaczepem powinna wytrzymać obciążenie większe niż deklarowane w przepisach WT/008/PIMOT/93 oraz jej wytrzymałość powinna przekraczać wartość deklarowaną w ulotce przez producenta lub dystrybutora.

W dalszym ciągu rozważań przyjęto założenie, że przedmiotem badań jest partia linek, która przeszła pozytywnie weryfikację ze względu na wszystkie właściwości, z wyjątkiem wytrzymałości na rozciąganie mierzonej w jednostce czasu (20 s). Przyjęto, że badaniu poddano próbki linek przeznaczonych do holowania pojazdów o masie do 1500 kg. Założono, że obserwowana zmienna losowa X przybierała wartość 0, gdy linka przeszła pozytywnie próbę obciążenia nie mniejszą niż 1200 daN, i wartość 1, gdy linka w czasie próby wytrzymałości została zerwana lub też jej mocowania zostały na tyle zdeformowane, że nie kwalifikowała się ona do dalszego użytku. Założono dalej, że badanie przeprowadzono w ciągu 10 kolejnych momentów czasowych, powiększając za każdym razem liczebność próbki o 1 sztukę. Wyniki badania podano w tabeli 8.

Tabela 8. Wytrzymałość linek holowniczych

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1

Źródło: dane umowne.

Należy sprawdzić, czy na podstawie tych danych można przyjąć jedną z następujących hipotez:

$$H_0: p = p_0 = 0,01,$$

$$H_1: p = p_1 = 0,03.$$

Symbole p_0 i p_1 oznaczają odpowiednio poziomy wadliwości: maksymalnej dopuszczalnej i minimalnej dyskwalifikującej badanego procesu. W trakcie weryfikacji hipotez przyjęto dodatkowe założenie $\alpha = \beta = 0,01$. Sprawdzenie zdefiniowanych hipotez odbyło się w pierwszej kolejności z wykorzystaniem klasycznej procedury sekwencyjnej, a następnie zmodyfikowanej procedury sum skumulowanych.

W trakcie wykorzystania klasycznej procedury sekwencyjnej wyznaczono wartości statystyki z_n postaci (10) i (11) i porównano je z liniami kontrolnymi $z_{d,n}$ i $z_{g,n}$ obliczonymi na podstawie wzorów (13)–(15). Wynikało to z założenia, że otrzymana w trakcie analizy charakterystyka będąca sumą zmiennych zero-jedynkowych ma rozkład dwumianowy. Wartości parametrów a , b i c oraz powstałe na ich podstawie równania linii kontrolnych przedstawiały się następująco:

$$a = \frac{\ln \frac{0,01}{0,99}}{\ln \frac{0,03 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,97}} = -4,11; \quad b = \frac{\ln \frac{0,99}{0,01}}{\ln \frac{0,03 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,97}} = 4,11; \quad c = \frac{\ln \frac{0,99}{0,97}}{\ln \frac{0,03 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,97}} = 0,02;$$

$$z_{d,n} = -4,11 + 0,02n; \quad z_{g,n} = 4,11 + 0,02n.$$

Wyniki analizy danych empirycznych zestawiono w tabeli 9.

Tabela 9. Analiza wytrzymałości linek za pomocą klasycznej procedury sekwencyjnej

t	n	x_t	z_n	$z_{d,n}$	$z_{g,n}$	Decyzja
1	1	0	0	-4,09	4,12	badać dalej
2	2	0	0	-4,07	4,14	badać dalej
3	3	0	0	-4,05	4,16	badać dalej
4	4	1	1	-4,03	4,18	badać dalej
5	5	0	1	-4,02	4,20	badać dalej
6	6	0	1	-4,00	4,22	badać dalej
7	7	1	2	-3,98	4,23	badać dalej
8	8	1	3	-3,96	4,25	badać dalej
9	9	1	4	-3,94	4,27	badać dalej
10	10	1	5	-3,92	4,29	przyjąć H_1

Źródło: obliczenia własne.

Jak wynika z tabeli 9, przy liczebności próbki $n = 10$ została podjęta decyzja o przyjęciu hipotezy H_1 przy ryzyku błędu $\alpha = 0,01$.

W kolejnym kroku badania dane wejściowe zestawione w tabeli 8 poddano weryfikacji przy użyciu zmodyfikowanej procedury sum skumulowanych. W tym

celu, korzystając ze wzorów (23) i (24) oraz (30) i (31), wyznaczono kolejno parametry d_0, d_1 oraz h_0, h_1 .

$$d_0 = \frac{\ln \frac{0,01}{0,99}}{\ln \frac{0,97}{0,99}} = -225,15; \quad d_1 = \frac{\ln \frac{0,99}{0,01}}{\ln \frac{0,97}{0,99}} = 225,15;$$

$$h_0 = d_0 c = z_d^* = -4,11; \quad h_1 = d_1 c = z_g^* = 4,11.$$

Obliczenia robocze oraz wynikające z nich wnioski ujęto w tabeli 10.

Tabela 10. Analiza wytrzymałości linek za pomocą zmodyfikowanej procedury sum skumulowanych

t	i	x_{it}	n	$z_i^* = x_{it} - c$	z_n^*	Uwagi
1	1	0	1	-0,02	-0,02	$x_i < c$ (start sekw. A, $i = 1$)
2	2	0	2	-0,02	-0,04	kumulować ($i = i + 1$)
3	3	0	3	-0,02	-0,05	kumulować ($i = i + 1$)
4	1	1	4	0,98	0,98	$z_n^* > 0$ (start sekw. B, kumulować ($i = 1$))
5	2	0	5	-0,02	0,96	kumulować ($i = i + 1$)
6	3	0	6	-0,02	0,95	kumulować ($i = i + 1$)
7	4	1	7	0,98	1,93	kumulować ($i = i + 1$)
8	5	1	8	0,98	2,91	kumulować ($i = i + 1$)
9	6	1	9	0,98	3,89	kumulować ($i = i + 1$)
10	7	1	10	0,98	4,87	$z_n^* > z_g^*$ (przyjąć H_1)

Źródło: obliczenia własne.

W trakcie przebiegu badanego procesu dostrzec można dwie sekwencje. Pierwsza z nich (sekwencja A) prowadziła do przyjęcia hipotezy H_0 , ale została przerwana po czterech krokach, ponieważ wartość sumy skumulowanej z_n^* była większa od zera. Moment $t = 4$ był równocześnie punktem startu drugiej sekwencji typu B, która doprowadziła po siedmiu kolejnych krokach kumulacji do przyjęcia hipotezy H_1 . A zatem wnioski, jakie wynikają z zastosowania zmodyfikowanej procedury sum skumulowanych, są identyczne jak w przypadku użycia klasycznej procedury sekwencyjnej. Na koniec warto zauważyć, że przyjęcie hipotezy H_1 może nastąpić znacznie szybciej niż przyjęcie hipotezy H_0 . W analizowanym przykładzie potrzebnych było 5 przypadków zerwania linki holowniczej w dziesięcioelementowej próbie. Jednocześnie, aby potwierdzić prawdziwość hipotezy H_0 , należałoby przebadać przynajmniej 226 linek (miejsce zerowe linii $z_{d,n}$ lub parametr d_1) i otrzymać we wszystkich przypadkach potwierdzenie zgodności wytrzymałości linek z wymaganiami w tym zakresie.

5. Podsumowanie

Przedstawione w opracowaniu procedury i przykłady nie wyczerpują zagadnienia zastosowania kart kontrolnych sum skumulowanych z możliwością akceptacji procesu. W omawianych przypadkach ograniczono się do sytuacji, gdy analizowana zmienna jest destymulantą jakości. Skupiono się na najczęściej występujących podczas kontroli jakości rozkładach zmiennych diagnostycznych, takich jak: rozkład dwumianowy, rozkład normalny i rozkład Poissona. Rozkład dwumianowy jest łączony często z przypadkami, gdy miarą jakości wykonania jest wadliwość, a badany proces ma charakter binarny. Rozkład Poissona ma natomiast zastosowanie, gdy miarą jakości produktu jest liczba wad lub niezgodności w jednostce produktu⁶. Z kolei rozkład normalny wykorzystywany jest najczęściej w sytuacji, gdy obserwowana zmienna diagnostyczna ma charakter ciągły (tzw. procesy quasi-ciągłe). Na uwagę zasługują również (nieujęte w tym opracowaniu) procedury kontrolne stosowane dla zmiennych diagnostycznych o rozkładzie wykładniczym. Rozkład wykładniczy jest najczęściej stosowany do opisu niezawodności nienaprawialnych elementów systemów technicznych, a używana zmienna diagnostyczna jest definiowana jako czas poprawnej pracy tychże elementów. Tego typu zmienna losowa będzie traktowana jako stymulanta jakości, co przełoży się na konieczność modyfikacji omawianych procedur.

Jak zaznaczono na wstępie artykułu, opisane w nim karty kontrole sum skumulowanych nie są jedynymi procedurami pozwalającymi na dyskwalifikację lub akceptację monitorowanych procesów. Należy wymienić również inne karty kontrolne, w tym procedury kontrolne oparte na kartach kontrolnych Shewharta. Opis ich funkcjonowania można znaleźć np. w cytowanych wcześniej pracach A. Iwasiewicza [1985, 1999, 2001], a także w normie PN-ISO 7966 z 2001 r. Wymagają one jednak wstępnego ustalenia niezbędnej liczebności próby potrzebnej do przyjęcia jednej z weryfikowanych hipotez. W procedurach sekwencyjnych oraz powstałych na ich podstawie procedurach sum skumulowanych liczebność próby jest parametrem określanym dopiero w momencie zaakceptowania lub dyskwalifikacji procesu. Jest to istotna zaleta tych narzędzi, pozwalająca na minimalizację ryzyka przeszacowania liczebności próby, a co się z tym wiąże, generowania zbytecznych kosztów badania i oceny. Jest to szczególnie ważne, gdy badania kontrolne mają charakter niszczący. Z tego względu zaprezentowane w niniejszym artykule metody sekwencyjne oceny procesu produkcyjnego wydają się znacznie skuteczniejsze i kosztowo efektywniejsze niż analogiczne procedury oparte na kartach kontrolnych Shewharta.

⁶ Procedury kontrolne sum skumulowanych dla zmiennych o rozkładzie Poissona zostały omówione np. w pracy [Major 2015b, s. 223–238].

Literatura

- Iwasiewicz A. [1985], *Statystyczna kontrola jakości w toku produkcji, systemy i procedury*, PWN, Warszawa.
- Iwasiewicz A. [1999], *Zarządzanie jakością – podstawowe problemy i metody*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Kraków.
- Iwasiewicz A. [2001], *Karty kontrolne Shewharta z możliwością akceptacji procesu*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 320.
- Iwasiewicz A. [2005–2006], *Monitorowanie procesów binarnych*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, vol. XLVI–XLVII.
- Iwasiewicz A. [2008–2009], *Monitorowanie procesów binarnych za pomocą kart kontrolnych sum skumulowanych*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, vol. XLIX–L.
- Iwasiewicz A. [2011], *Analiza wielowymiarowych procesów binarnych jako metoda wspomaganie decyzji menedżerskich w zarządzaniu jakością [w:] Przedsiębiorcze aspekty rozwoju organizacji i biznesu*, red. A. Chodyński, Oficyna Wydawnicza AFM, Kraków.
- Iwasiewicz A., Paszek Z., Steczkowski J. [1988], *Sekwencyjne metody kontroli jakości*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.
- Major M. [1997], *Sterowanie procesem za pomocą kart kontrolnych sum skumulowanych*, Materiały konferencyjne z I Krajowej Konferencji Naukowej Materiałoznawstwo–Odlewnictwo–Jakość, vol. 3: Jakość, Kraków.
- Major M. [2015a], *Acceptance Control Charts*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 7(943), <https://doi.org/10.5678/ZNUEK.2015.0943.0702>.
- Major M. [2015b], *Karty kontrolne sum skumulowanych z możliwością akceptacji procesu dla zmiennych diagnostycznych o rozkładzie Poissona [w:] Wielowymiarowość systemów zarządzania*, red. M. Giemza, T. Sikora, Wydawnictwo Naukowe PTTŻ, Kraków.
- Montgomery D.C. [2009], *Introduction to Statistical Quality Control*, Sixth ed., John Wiley & Sons, Inc., Jefferson City, USA.
- Neyman J., Pearson E.S. [1933], *On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: „Mathematical, Physical and Engineering Sciences”*, vol. 231, The Royal Society Publishing, <http://www.stats.org.uk/statistical-inference/NeymanPearson1933.pdf> (data dostępu: 23.12.2016).
- Page E.S. [1954], *Continuous Inspection Scheme*, „Biometrika”, vol. 41(1/2).
- PN-ISO 7966: 2001. Karty akceptacji procesu, Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa.
- PN-P-84004:2003. Tekstylnia – Działania i wyroby dziane – Wartości wskaźnika zmiany wymiarów po praniu, Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa.
- Wald A. [1945], *Sequential Tests of Statistical Hypotheses*, „Annals of Mathematical Statistics”, vol. 16(2).

Acceptance Cumulative Sum Control Charts: Overview of Basic Tools

(Abstract)

The main goal of this article was to review and analyse basic cumulative sum control charts, which can be used to accept or disqualify an analysed production process. In the

literature, there are two kinds of acceptance control charts: Shewhart Control Charts and Cumulative Sum Control Charts (CUSUM Charts). Both can be used by quality managers or financial managers in monitoring or auditing processes. The article presents only selected process control procedures. The conclusion of the article provides examples of the applications of the solutions described.

Keywords: statistical quality control, statistical process control, acceptance control charts, cumulative sum control charts.