Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

9 (957)

ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2016; 9 (957): 5–20
DOI: 10.15678/ZNUEK.2016.0957.0901

Beata Ciałowicz

Analiza roli kredytów konsumpcyjnych w procesie dyfuzji innowacji – ujęcie aksjomatyczne*

Streszczenie

Głównym celem artykułu jest formalna analiza roli kredytów konsumpcyjnych w procesie dyfuzji innowacji. Aby zrealizować postawione zadanie, zostały użyte następujące narzędzia: teoriomnogościowy i topologiczny aparat pojęciowy z teorii równowagi ogólnej oraz statyczny model ekonomii Debreu z pieniądzem w postaci wielozakresowego systemu relacyjnego. Dla danego modelu zdefiniowano specyficzne rozszerzenia ze względu na zmiany innowacyjne w sferze konsumpcji lub zmiany imitujące w sferze produkcji. Wprowadzone rozszerzenia umożliwiły formalne zdefiniowanie procesu dyfuzji innowacji oraz przeprowadzenie analizy roli kredytów konsumpcyjnych w tym procesie. W szczególności wykazano, że kredyty te mogą poprawić końcowy stan równowagi danego procesu.

Słowa kluczowe: kredyt konsumencki, proces dyfuzji innowacji, ekonomia Debreu z pieniądzem, schumpeterowska ewolucja innowacyjna, analiza aksjomatyczna.
Klasyfikacja JEL: O31, O10, C6.

Beata Ciałowicz, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Katedra Matematyki, 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27, e-mail: beata.cialowicz@uek.krakow.pl

* Artykuł powstał w wyniku realizacji projektu badawczego nr UMO-2014/13/B/HS4/00552 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

1. Wprowadzenie

Zgodnie z teorią rozwoju gospodarczego J.A. Schumpetera [1912] ważnym elementem ewolucji innowacyjnej jest proces dyfuzji innowacji, w którym aktywną rolę odgrywają zarówno producenci-innowatorzy wprowadzający na rynek nowe towary lub nowe technologie produkcji, jak i konsumenci, których akceptacja danej innowacji jest warunkiem jej sukcesu rynkowego. Zagadnienie aktywnej roli konsumentów pojawiło się w wielu opracowaniach z nurtu neoschumpeterowskiego, dotyczącego teorii ewolucji innowacyjnej, a zapoczątkowanego przez R.R. Nelsona i S.G. Wintera [1982]. W tym nurcie mieści się również program badawczy dotyczący modelowania wizji J.A. Schumpetera w aparacie pojęciowym teorii równowagi ogólnej Arrowa-Debreu, zapoczątkowany w latach 20. ubiegłego wieku i obecnie kontynuowany [Malawski 1999, Malawski 2005, Malawski i Woerter 2006, Ciałowicz i Malawski 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, Ciałowicz 2015, 2016]. Niniejszy artykuł jest rozwinięciem zagadnień poruszanych we wcześniejszych opracowaniach autorki, a jego celem jest aksjomatyczna analiza roli kredytu konsumenckiego w procesie dyfuzji innowacji. Podjęto próbę wykazania, że konsumenci, dysponując możliwością wykorzystania kredytu konsumenckiego w celu realizacji innowacyjnego planu konsumpcji (czyli kupienia towarów innowacyjnych), mają wpływ na proces dyfuzji innowacji zainicjowany przez producentów-innowatorów, co powoduje zmiany w całym systemie ekonomicznym. W szczególności starano się udowodnić, że kredyt konsumencki daje możliwość osiągnięcia lepszego (w sensie optymalizacji działalności uczestników rynku) stanu równowagi na koniec procesu dyfuzji innowacji.

W realizacji postawionego celu wykorzystany został statyczny model ekonomii Debreu z własnością prywatną i z pieniądzem oraz pojęcie rozszerzenia innowacyjnego tego modelu. W następnym etapie badania zdefiniowano proces dyfuzji innowacji w danym modelu oparty na zmianach imitujących w sferze produkcji oraz zmianach innowacyjnych w sferze konsumpcji z uwzględnieniem oszczędności i kredytów konsumenckich. Ważnym elementem badania danego procesu jest porównywanie stanów równowagi ze względu na optymalne plany uczestników rynku. W ostatnim etapie badania rola kredytu konsumpcyjnego w procesie dyfuzji innowacji została poddana analizie za pomocą odpowiednich twierdzeń.

2. Model ekonomii Debreu z pieniądzem oraz rozszerzenia tego modelu

Rozważmy statyczny model ekonomii Debreu z własnością prywatną i z pieniądzem [Ciałowicz i Malawski 2011] w postaci wielozakresowego systemu relacyjnego $E_m = (\mathbb{R}^{\ell+2}, P_m, C_m, F, \varpi_m, \mu)$. Model ten (nazywany w dalszej części pracy ekonomią Debreu z pieniądzem) jest połączeniem systemów produkcji i konsumpcji z pieniądzem oraz sfery bankowej. W modelu tym zakładamy, że całkowity zasób początkowy jest własnością konsumentów i jednocześnie mają oni udziały w zyskach producentów i banków.

System produkcji z pieniądzem ma postać dwuzakresowego systemu relacyjnego: $P_m = (B, \mathbb{R}^{\ell+2}, Ch_{P_m})$, gdzie $Ch_{P_m} = (y_m, p_m, \eta_m, \pi_m)$ jest charakterystyką systemu P_m. W systemie tym każdy producent $b \in B$ działa w $\ell + 2$-wymiarowej przestrzeni towarów $\mathbb{R}^{\ell+2} = \mathbb{R}^{\ell_R} \times \mathbb{R}^{\ell_F}$, gdzie $\mathbb{R}^{\ell_R}$ jest przestrzenią towarów „realnych", a $\mathbb{R}^{\ell_F}$ jest dwuwymiarową przestrzenią finansową, co oznacza, że w każdym planie produkcji dwie ostatnie współrzędne są przypisane odpowiednio do oszczędności i kredytów. W systemie tym każdy producent $b \in B$ charakteryzowany jest przez zbiór planów technologicznie możliwych $y_m(b) := Y_b \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$, a celem jego działania są wybór i realizacja planu produkcji $y_b = (y_1, \ldots, y_\ell, 0, -c_b) \in Y_b$, w którym c_b oznacza kredyt producenta b maksymalizujący zysk przy danym wektorze cen $p_m = (p_1, \ldots, i_s, i_c)$, gdzie i_s, i_c oznaczają oprocentowanie odpowiednio oszczędności i kredytów. Fakt ten opisuje korespondencja podaży η_m taka, że dla każdego $b \in B$, $\eta_m(b) := \eta_b(p_m) := \{y'_b \in Y_b : p_m y'_b = \max_{y_b \in Y_b} p_m y_b\}$, oraz funkcja zysku maksymalnego π_m taka, że dla każdego $b \in B$, $\pi_m(b) := \pi_m(p_m) := \max_{y_b \in Y_b} p_m y_b$.

Podobnie formalny model systemu konsumpcji z pieniądzem ma postać trójzakresowego systemu relacyjnego: $K_m = (A, \mathbb{R}^{\ell}, \mathcal{P}, Ch_{K_m})$, gdzie $Ch_{K_m} = (\chi_m, e_m, \varepsilon_m, p_m, \beta_m, \varphi_m)$ jest charakterystyką systemu K_m. W systemie tym każdy konsument $a \in A$ charakteryzowany jest przez zbiór konsumpcji $\chi_m(a) := X_a \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$ taki, że $x_a = (x_1, \ldots, x_\ell, s_a, c_a) \in X_a$, gdzie s_a oznacza oszczędności konsumenta, a c_a – wysokość jego kredytu. Zakładamy, że oszczędności są traktowane jako wyjście dla konsumenta, co oznacza, że $s_a \leq 0$, natomiast kredyty konsumenckie są wejściem dla konsumenta, dlatego $c_a \geq 0$. Ponadto konsumenta charakteryzuje jego zasób początkowy $e_m(a) := e_a = (e_1, \ldots, e_\ell, s_a, c_a) \in X_a$ oraz relacja preferencji $\varepsilon_m(a) := \preccurlyeq_a \in \mathcal{P}$ (zawężona do zbioru konsumpcji X_a), gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną wszystkich relacji preferencji w przestrzeni towarów. Rola konsumenta polega na wyborze i realizacji planu konsumpcji maksymalizującego preferencje konsumenta na jego zbiorze budżetowym $\beta_m(a)$. Fakt ten opisuje korespondencja popytu φ taka, że $\varphi_m(a) := \{x_a^* \in \beta_m(a) : \forall x_a \in \beta_m(a)\ x_a \preccurlyeq_a x_a^*\}$.

System finansowy F ma postać dwuzakresowego systemu relacyjnego: $F = (M, \mathbb{R}^{\ell+2}, Ch_F)$, gdzie $Ch_F = (f, p_m, \gamma, \zeta)$ jest charakterystyką systemu F. W systemie tym każdy bank $r \in M$ charakteryzowany jest przez zbiór planów finansowych możliwych do realizacji $f(r) := F_r \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$. Zakładamy przy tym, że działania banków są neutralne dla dóbr realnych, co oznacza, że plan finansowy banku r ma postać $f_r = (0, \ldots, 0, s_r, c_r) \in \mathbb{R}^{\ell+2}$, gdzie $s_r = \sum_{a \in A} s_{ar}$, $s_{ar} \leq 0$ oznacza oszczędności konsumenta a w banku r, $c_r = \sum_{b \in B} c_{br} + \sum_{a \in A} c_{ar}$, $c_{br} \geq 0$

oznacza kredyt producenta b udzielony przez bank r, zaś $c_{ar} \geq 0$ oznacza kredyt konsumenta a udzielony przez bank r. W danym planie finansowym oszczędności konsumentów są wejściem (współrzędna ujemna), a kredyty są wyjściem (współrzędna dodatnia). Jednocześnie zgodnie ze współczynnikiem pokrycia kredytowego $\lambda < 0$, plan finansowy f_r jest możliwy do realizacji przez bank r, $f_r \in F_r$, jeżeli $c_r \leq \lambda s_r$. Zauważmy, że zgodnie ze współczynnikiem pokrycia kredytowego w przypadku braku oszczędności ($s_r = 0$) bank nie może udzielać kredytów ($c_r = 0$), dlatego w rozważanym modelu zakładamy, że $s = \sum_{r \in M} s_r \neq 0$. Zgodnie z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami zachodzą zależności: $c_b = \sum_{r \in M} c_{br}$, $c_a = \sum_{r \in M} c_{ar}$, $s_a = \sum_{r \in M} s_{ar}$.

W danym modelu zakładamy, że każdy bank traktowany jest jak producent działający w przestrzeni dóbr finansowych, a jego celem działania jest maksymalizacja zysku na zbiorze finansowym, przy danym systemie cen. Zgodnie z założeniami, że oprocentowanie kredytów producentów i konsumentów i_c jest takie samo oraz $i_s < i_c$, dla danego wektora cen $p_m = (p_1, \ldots, i_s, i_c)$ zysk każdego banku pochodzi z różnicy oprocentowania kredytów i oszczędności: $i_c - i_s$.

Działalność banków opisuje korespondencja podaży pieniądza γ oraz funkcja zysku maksymalnego banków ζ, przy czym zysk banku z realizacji planu finansowego f_r przy wektorze cen p_m wynosi:

$$z_r(p_m, f_r) := p_m f_r = i_c\left(\sum_{b \in B} c_{br} + \sum_{a \in A} c_{ar}\right) + i_s\left(\sum_{a \in A} s_{ar}\right).$$

Stąd $\gamma(r) = \gamma_r(p_m) := \{f_r' \in F_r : z_r(p_m, f_r') = \max_{f_r \in F_r} z_r(p_m, f_r)\}$ oraz $\zeta(r) = \zeta_r(p_m) := \max_{f_r \in F_r} z_r(p_m, f_r)$ dla każdego $r \in M$.

Ekonomia Debreu z pieniądzem E_m jest kombinacją systemu produkcji z pieniądzem P_m, systemu konsumpcji z pieniądzem K_m oraz systemu finansowego F taką, że konsumenci mają udziały w zyskach zarówno producentów, jak i banków. Udziały te mierzone są odpowiednio funkcjami udziałów θ i μ takimi, że dla każdej pary $(a, b) \in A \times B$ liczba $\theta_{ab} := \theta(a, b) \in [0, 1]$ opisuje udział konsumenta a w zysku producenta b, przy czym dla każdego $b \in B$, $\sum_{a \in A} \theta_{ab} = 1$ oraz dla każdej pary $(a, r) \in A \times M$ liczba $\mu_{ar} \in [0, 1]$ opisuje udział konsumenta a w zysku banku r i dla każdego $r \in M$, $\sum_{a \in A} \mu_{ar} = 1$. Ponadto całkowite zasoby początkowe $\varpi \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ ekonomii E_m są własnością konsumentów, to znaczy $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\ell, \varpi_s, \varpi_c) := \sum_{a \in A} e_a$. Zgodnie z powyższymi założeniami majątek konsumenta w danym modelu wynosi:

$$w_a = proj_{\mathbb{R}^\ell}(p_m) \circ proj_{\mathbb{R}^\ell}(e_a) + \sum_{b \in B} \theta_{ab} \pi_b(p_m) + \sum_{r \in M} \mu_{ar} \zeta_r(p_m) + s_a + c_a,$$

a zbiór budżetowy ma postać $\beta_m(a) := \{x_a \in x_m(a) := p_m x_a \leq w_a\}$. Zauważmy, że oszczędności konsumenta pochodzą z niewykorzystanej części jego zasobu początkowego przy realizacji planu konsumpcji $x_a : s_a = p_m x_a - w_a$.

W modelu E_m rola każdego uczestnika rynku polega na wyborze i realizacji planu działania optymalnego dla niego przy danym systemie cen i zgodnego z indywidualnymi ograniczeniami w działaniu. W szczególności dla danego wektora cen i danych stóp procentowych każdy konsument decyduje, czy powinien część zasobu początkowego przeznaczyć na oszczędności i zwiększyć swoją siłę nabywczą w przyszłości, czy zmienić swoje ograniczenia budżetowe poprzez kredyt konsumpcyjny. Jednocześnie producenci, których celem jest maksymalizacja zysku, mogą uzyskać kredyt z banku, pozwalający im na realizację innowacyjnego planu produkcji. Zauważmy, że w danym modelu zbiory agentów (producentów, konsumentów i banków) działających w danej przestrzeni nie są rozłączne, ponieważ zarówno producenci, jak i banki są jednocześnie konsumentami.

Przedstawiony model jest specyficzną modyfikacją ekonomii Debreu z własnością prywatną $E=(\mathbb{R}^{\ell}, P, K, \theta, \varpi)$ [Debreu 1959], ponieważ $proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(E_m)=E$, gdzie $P = proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(P_m)$, $K = proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(K_m)$.

Formalne modelowanie ewolucji innowacyjnej jest oparte na definicji rozszerzenia innowacyjnego danego systemu ekonomicznego, przy czym zgodnie z założeniem o wiodącej roli producentów w innowacyjnej ewolucji schumpeterowskiej przypomniana zostanie najpierw definicja rozszerzenia innowacyjnego systemu produkcji, a następnie wprowadzona zostanie definicja rozszerzenia innowacyjnego systemu produkcji z pieniądzem.

Definicja 2.1 [Malawski 1999]. System produkcji $P'=(B, \mathbb{R}^{\ell}, Ch_{P'})$ nazywamy rozszerzeniem innowacyjnym systemu $P=(B,\mathbb{R}^{\ell},Ch_P)$, w skrócie $P \subset_i P'$, jeżeli:

1) $\ell \leq \ell'$,
2) $\exists b' \in B', \ \forall b \in B$
(2.1) $proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(Y'_{b'}) \not\subset Y_b$, (2.2) $proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(p')=p$, (2.3) $proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(\eta'_{b'}(p')) \not\subset \eta_b(p)$,
(2.4) $\pi_b(p) < \pi'_{b'}(p')$.

Definicja 2.2. System produkcji z pieniądzem P'_m nazywamy rozszerzeniem innowacyjnym systemu P_m, w skrócie $P_m \subset_i P'_m$, jeżeli:

1) $proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(P) \subset_i proj_{\mathbb{R}^{\ell'}}(P')$,
2) $\sum_{b \in B} c_b < \sum_{b' \in B'} c'_{b'}$.

Zgodnie z podaną definicją rozszerzenie innowacyjne systemu produkcji z pieniądzem oznacza, że zachodzą zmiany innowacyjne w sferze realnej gospodarki oraz suma kredytów zwiększa się. Założenie drugie opiera się na teorii J.A. Schumpetera, który twierdził, że zmiany innowacyjne wprowadzane przez producentów mogą być realizowane tylko poprzez kredyty udzielane przez banki.

Zgodnie z schumpeterowską teorią rozwoju gospodarczego zmiany innowacyjne w sferze produkcji są determinantami zmian w całym systemie, co bezpośrednio prowadzi do definicji rozszerzenia innowacyjnego modelu ekonomii Debreu E oraz modelu z pieniądzem E_m. Zakładamy przy tym, że zmiany innowacyjne zachodzą tylko w sferze realnej, a nie w sferze finansowej gospodarki, co oznacza, że banki nie są innowatorami w tym ujęciu.

Definicja 2.3 [Malawski 1999]. System ekonomiczny $E' = (\mathbb{R}^{\ell'}, P', C', \theta', \omega')$ nazywamy rozszerzeniem innowacyjnym systemu $E = (\mathbb{R}^{\ell}, P, C, \theta, \omega)$, w skrócie: $E \subset_i E'$, jeżeli $P \subset_i P'$.

Niech dane będą dwie ekonomie Debreu z pieniądzem:

$$E_m = (\mathbb{R}^{\ell}, P_m, K_m, F, \theta, \varpi_m, \mu),\ E'_m = (\mathbb{R}^{\ell'}, P'_m, K'_m, F', \theta', \varpi'_m\ , \mu').$$

Definicja 2.4 [Ciałowicz i Malawski 2011]. System ekonomiczny E'_m jest rozszerzeniem innowacyjnym systemu E_m (w skrócie: $E_m \subset_i E'_m$), jeżeli:
1) $E_p \subset_i E'_p$, gdzie $E_p = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(E_m)$, $E'_p = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(E'_m)$ (definicja 2.3),
2) $\left|\sum_{r \in M} s_r\right| < \left|\sum_{r' \in M'} s'_{r'}\right|$.

Zgodnie z przedstawioną definicją 2.4 rozszerzenie innowacyjne ekonomii Debreu z pieniądzem oznacza innowacyjne zmiany w sferze realnej danego modelu oraz wzrost sumy oszczędności, a więc również wzrost sumy kredytów (ze względu na współczynnik pokrycia kredytowego). Oznacza to, że przy założeniu niezmienionej sumy kredytów konsumpcyjnych rozszerzenie innowacyjne ekonomii Debreu z pieniądzem implikuje rozszerzenie innowacyjne w systemie produkcji z pieniądzem (definicja 2.2).

Uwaga: jeżeli $E_m \subset_i E'_m$ oraz $\sum_{a \in A} c_a = \sum_{a' \in A'} c'_{a'}$, to $P_m \subset_i P'_m$.

Innym rodzajem zmian w systemie produkcji jest rozszerzenie imitujące, stanowiące ważny element procesu dyfuzji innowacji.

Niech dane będą trzy systemy produkcji z pieniądzem: $P_m = (B, \mathbb{R}^{\ell+2}; y, p, \eta, \pi)$, $P'_m = (B', \mathbb{R}^{\ell'+2}; y', p', \eta', \pi')$, $P''_m = (B'', \mathbb{R}^{\ell''+2}; y'', p'', \eta'', \pi'')$ takie, że $P_m \subset_i P'_m$, $\ell \le \ell' \le \ell''$, $B = B'' = B''$ oraz B'_i jest zbiorem producentów-innowatorów w systemie P'_m.

Definicja 2.5 (por. [Ciałowicz 2014]). System produkcji P''_m nazywamy rozszerzeniem imitującym systemu produkcji P'_m (w skrócie: $P'_m \subset_{im} P''_m$), jeżeli istnieje producent-innowator $b'_i \in B'_i$ oraz producent $b'' \in B''$ taki, że $\exists y''_{b''} \in Y''_{b''}\ \exists y_b \in Y_b$: $proj_{\mathbb{R}^{\ell+2}}(y''_{b''}) = y_b$.

Zgodnie z powyższą definicją w rozszerzeniu imitującym systemu produkcji w systemie P''_m działa co najmniej jeden producent b'', który jest imitatorem producenta-innowatora b'_i, czyli imitator realizuje plan produkcji $y''_{b''}$, który jest imitacją innowacyjnego planu produkcji y_b.

Zauważmy, że rozszerzenie imitujące nie wyklucza rozszerzenia innowacyjnego, tzn. dla danych systemów produkcji może zachodzić $P_m \subset_i P''_m$ lub $P'_m \subset_i P''_m$.

Definicja 2.6. System ekonomiczny E'_m jest rozszerzeniem systemu E_m ze zmianami imitującymi w sferze produkcji (w skrócie: $E_m \subset_{P_{im}} E'_m$), jeżeli $P_m \subset_{im} P'_m$.

3. Analiza innowacyjnych planów produkcji i konsumpcji

Na podstawie definicji 2.2 rozszerzenia innowacyjnego systemu produkcji z pieniądzem w zbiorze technologicznie możliwych planów produkcji każdego producenta-innowatora $b' \in B'$ możemy wyróżnić innowacyjne plany produkcji $y'_{b'}$ takie, że $y'_{b'} \in proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(Y'_{b'}) \backslash proj_{\mathbb{R}^{\ell}}(Y_b)$ dla każdego $b \in B$. Jednocześnie zmiany innowacyjne dotyczą wyróżnionego towaru realnego, który można nazwać innowacyjnym. Zakładamy przy tym, że w przedstawionym ujęciu towar innowacyjny nie jest pieniądzem.

Definicja 3.1 (por. [Ciałowicz 2015]). Niech dane będą dwa systemy produkcji P'_m, P_m takie, że $P_m \subset_i P'_m$. Towar $k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ nazwiemy innowacyjnym, jeżeli istnieje producent-innowator $b' \in B'$ oraz istnieje innowacyjny plan produkcji $y'_{b'} = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_{\ell'}, 0, -c'_{b'}) \in Y'_{b'}$ taki, że dla dowolnego producenta $b \in B$ oraz dowolnego planu produkcji $y_b = (y_1, y_2, \ldots, y_\ell, 0, -c_b) \in Y_b$ zachodzi zależność $y'_k \neq y_k$.

Uwaga: jeżeli plan produkcji $y_b = (y_1, y_2, \ldots, y_\ell, 0, -c_b)$ jest innowacyjny, to $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y_b) \neq \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Zauważmy, że w rozszerzeniu innowacyjnym systemu produkcji z pieniądzem obserwowane zmiany innowacyjne zachodzą w procesie produkcji wyróżnionego towaru k. Stąd w przestrzeni towarów możemy wyróżnić podprzestrzeń towarów innowacyjnych $\mathbb{R}^{\ell_I}$ oraz podprzestrzeń towarów nieinnowacyjnych $\mathbb{R}^{\ell_n}$, co daje nam możliwość rozważania przestrzeni towarów w postaci: $\mathbb{R}^{\ell+2} = \mathbb{R}^{\ell_n} \times \mathbb{R}^{\ell_I} \times \mathbb{R}^2$. Ze względu na dalszą analizę zakładamy, że towarem innowacyjnym jest tylko towar konsumpcyjny, czyli wejście dla konsumenta lub wyjścia dla producentów (współrzędne dodatnie w planach konsumpcji i produkcji).

Wprowadzone pojęcie towaru innowacyjnego oraz wyszczególnienie w przestrzeni towarów dóbr tego rodzaju dotyczy również całego modelu Debreu z pieniądzem, zgodnie z definicją jego rozszerzenia innowacyjnego. Stąd możliwe jest zdefiniowanie innowacyjnego planu konsumpcji oraz rozszerzenia innowacyjnego systemu konsumpcji z pieniądzem.

Niech dana będzie ekonomia Debreu z pieniądzem E_m oraz jej rozszerzenie innowacyjne $E'_m\,(E_m \subset_i E'_m)$.

Definicja 3.2 (por. [Ciałowicz 2015]). Plan konsumpcji $x' \in \mathbb{R}^{\ell'+2}$ nazywamy innowacyjnym, jeżeli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x') > \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ oraz dla $x, y \in \mathbb{R}^{\ell}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_\ell)$, $x < y \Leftrightarrow x_k \leq y_k$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, \ell$ i $x \neq y$.

Zgodnie z przedstawioną definicją innowacyjnym planem konsumpcji jest plan, w którym co najmniej jedno wejście jest towarem innowacyjnym.

Definicja 3.3 (por. [Ciałowicz 2015]). Plan konsumpcji $x'_a = (x'_1, \ldots, x'_{\ell'}, s'_{a'}, c'_{a'}) \in \in \mathbb{R}^{\ell' + 2}$ konsumenta $a' \in A'$ nazywamy:

a) co najmniej tak innowacyjnym, jak plan $x_a = (x_1, \ldots, x_\ell, s_a, c_a) \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ konsumenta $a \in A$ (w skrócie: $x_a \leq_I x'_a$), jeżeli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x_a) \leq proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x'_a)$ oraz $c_a \leq c'_{a'}$,

b) bardziej innowacyjnym niż plan $x_a = (x_1, \ldots, x_\ell, s_a, c_a) \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ konsumenta $a \in A$ (w skrócie: $x_a <_I x'_a$), jeżeli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x_a) < proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x'_a)$ oraz $c_a \leq c'_{a'}$.

Zgodnie z przedstawioną definicją bardziej innowacyjny jest ten plan konsumpcji, w którym ilość żadnego z towarów innowacyjnych nie jest mniejsza niż ilość tego towaru w planie konsumpcji mniej innowacyjnym, a co najmniej jednego towaru innowacyjnego jest więcej, oraz wysokość kredytu konsumpcyjnego nie jest mniejsza. Zauważmy, że plan nieinnowacyjny, czyli taki, że $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x_a) = 0$, jest gorszy od każdego planu innowacyjnego z taką samą wysokością kredytu konsumpcyjnego.

Definicja 3.4 (por. [Ciałowicz 2015]). Relacja preferencji $\preccurlyeq_a \subset \mathbb{R}^{\ell + 2} \times \mathbb{R}^{\ell + 2}$ konsumenta $a \in A$ jest proinnowacyjna, jeżeli dla każdych dwóch planów konsumpcji $x_a, x'_a \in X_a$ zachodzi zależność $x_a <_I x'_a \Rightarrow x_a \prec_a x'_a$.

Zgodnie z powyższą definicją jeżeli relacja preferencji danego konsumenta jest proinnowacyjna, to woli on plany konsumpcji innowacyjne od nieinnowacyjnych.

Twierdzenie 3.1 (por. [Ciałowicz 2015]). Niech dany będzie konsument $a \in A$ charakteryzowany przez zbiór konsumpcji $X_a \neq \varnothing$ oraz relacje preferencji $\preccurlyeq_a$. Jeżeli:

1) $\exists x_a \in \beta_a \neq \varnothing : x_a = (x_1, \ldots, x_\ell, s_a, c_a)$ jest innowacyjny,

2) $\preccurlyeq_a$ jest proinnowacyjna,

to $\forall x^*_a \in \varphi(a) := \{x'_a \in \beta_a : \forall x_a \in \beta_a \ \ x_a \preccurlyeq_a x'_a\}$, gdzie $c^*_a = c_a$ jest innowacyjnym planem konsumpcji.

Dowód (*nie wprost*). Zakładamy, że istnieje optymalny plan konsumpcji $x^*_a \in \varphi(a)$, który nie jest innowacyjny, tzn. $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x^*_a) = \mathbf{0}$, oraz istnieje $x_a \in \beta_a \neq \varnothing$ taki, że x_a jest innowacyjny, czyli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x_a) > 0$. Ponieważ $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x^*_a) < < proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(x_a)$ oraz $c^*_a = c_a$ z założenia, że relacja preferencji $\preccurlyeq a$ jest proinnowacyjna, wynika, iż $x^*_a \prec_a x_a$. Jednocześnie zgodnie z definicją korespondencji popytu $\varphi(a)$ zachodzi $x_a \preccurlyeq_a x^*_a$, co jest sprzeczne z faktem, że $x^*_a \prec_a x_a$.

Definicja 3.5. Plan produkcji $y' \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ nazywamy:

a) co najmniej tak innowacyjnym, jak plan $y \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ (w skrócie: $y \leq_I y'$), jeżeli:

$$proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y) \leq proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y') \text{ oraz } p_m \circ y \leq p_m \circ y'.$$

b) bardziej innowacyjnym niż plan $y \in \mathbb{R}^{\ell + 2}$ (w skrócie: $y <_I y'$), jeżeli:

$$proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y) < proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y') \text{ oraz } p_m \circ y < p_m \circ y',$$

Zgodnie z powyższą definicją bardziej innowacyjny jest ten plan produkcji, w którym co najmniej jednego towaru innowacyjnego jest więcej, a żadnego nie jest mniej niż ilość tych towarów w planie produkcji mniej innowacyjnym (dotyczy to tylko towarów produkowanych, a nie zużywanych w procesie produkcji) i jednocześnie plan ten daje producentowi większy zysk niż mniej innowacyjny plan produkcji.

Uwaga: jeżeli plan produkcji $y = (y_1, y_2, \ldots, y_\ell, 0, -c)$ nie jest innowacyjny, czyli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(y) = \mathbf{0}$, to dla każdego innowacyjnego planu produkcji $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_\ell', 0, -c')$ takiego, że $c' = c$, zachodzi zależność $y <_I y'$, jeżeli $proj_{\mathbb{R}^{\ell_I}}(p_m) \geq \mathbf{0}$ (wśród towarów innowacyjnych nie ma towarów szkodliwych).

Zgodnie z teorią J.A. Schumpetera w rozwoju innowacyjnym systemu ekonomicznego zmiany w działalności konsumentów są efektem zmian innowacyjnych w sferze produkcji, ale w literaturze nurtu neoschumpeterowskiego [Andersen 2007, Clark i Goldsmith 2006, McMeekin i in. 2002, Hanusch i Pyka 2006, 2007, Saam 2005] procesy ewolucyjne rozważane są jako wielopoziomowe oraz dwukierunkowe zmiany, w których również konsumenci wpływają na działalność producentów. Ponadto zmiany innowacyjne mogą występować w sferze konsumpcji. Stąd wprowadzone zostanie rozszerzenie innowacyjne systemu z pieniądzem niezbędne do formalnego zdefiniowania procesu dyfuzji innowacji.

Niech dane będą dwa systemy konsumpcji z pieniądzem K_m oraz K_m'.

Definicja 3.6. System konsumpcji K_m' jest rozszerzeniem innowacyjnym systemu K_m, w skrócie $K_m \subset_i K_m'$, jeżeli:

1) $\ell = \ell'$,
2) $p = proj_{\mathbb{R}^{\ell+2}}(p')$,
3) $\exists a' \in A'$

(3.1) istnieje $x_{a'}' \in \beta_{a'}' \neq \varnothing$ taki, że $x_{a'}'$ jest innowacyjnym planem konsumpcji,
(3.2) $\preccurlyeq_{a'}$ jest proinnowacyjna,
(3.3) $\exists x_{a'}' \in \varphi_{a'}' \;\; \forall a \in A \;\; \forall x_a \in \varphi_a \;\; x_a <_I x_{a'}'$,
(3.4) $\sum_{a \in A} s_a \geq \sum_{a' \in A'} s_a', \sum_{a \in A} c_a \leq \sum_{a' \in A'} c_a'$.

System konsumpcji K_m' jest innowacyjnym rozszerzeniem systemu K, jeżeli w systemie tym działa co najmniej jeden konsument charakteryzowany przez proinnowacyjną relację preferencji (założenie 3.2) oraz osiągalnym dla niego innowacyjnym planem konsumpcji (założenie 3.1). Ponadto wśród optymalnych planów konsumenta a' jest co najmniej jeden, który jest bardziej innowacyjny (w sensie definicji 3.3) niż optymalne plany konsumpcji realizowane przez konsumentów w systemie K_m.

Definicja 3.7. System ekonomiczny E_m' jest rozszerzeniem systemu E_m ze zmianami innowacyjnymi w sferze konsumpcji (w skrócie: $E_m \subset_{K_i} E_m'$), jeżeli $K_m \subset_i K_m'$.

4. Klasyfikacja stanów równowagi w modelu Debreu z pieniądzem

W analizie wpływu kredytów konsumenckich na proces dyfuzji innowacji podstawowym problemem jest porównanie innowacyjności dwóch systemów ekonomicznych powstałych w wyniku różnych procesów dyfuzji innowacji. Próbą rozwiązania tego problemu jest porównywanie dwóch procesów dyfuzji innowacji tego samego modelu wyjściowego ze względu na końcowy stan równowagi.

Definicja 4.1

1) Alokacją ekonomii Debreu z pieniądzem E_m nazywamy $(m + n + k)$-elementowy ciąg punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^{\ell+2}$ o postaci $((x_a), (y_b), (f_r))$.

2) Alokacja $((x_a), (y_b), (f_r))$ spełnia warunek równowagi rynkowej, jeżeli:

a) $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(x - y + f) = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(\varpi)$, gdzie $x = \sum_{a \in A} x_a$, $y = \sum_{b \in B} y_b$, $f = \sum_{r \in M} f_r$,

b) $\sum_{a \in A} s_a + \sum_{r \in M} s_r = 2\varpi_s$,

c) $\sum_{r \in M} c_r + \sum_{a \in A} c_a + \sum_{b \in B} c_b = 3\varpi_c$.

3) Alokacja $((x_a), (y_b), (f_r))$ jest osiągalna dla ekonomii E_m, jeżeli:

a) dla każdego $a \in A$, $x_a \in X_a$,

b) dla każdego $b \in B$, $y_b \in Y_b$,

c) dla każdego $r \in M$, $f_r \in F_r$,

d) alokacja $((x_a), (y_b), (f_r))$ spełnia warunek równowagi rynkowej.

Zgodnie z powyższą definicją alokacją nazwiemy przypisanie wszystkim uczestnikom rynku pewnych planów działania. Jeżeli plany te są dla nich osiągalne ze względu na możliwości technologiczne (dla producentów i banków) lub psychofizyczne (dla konsumentów) oraz zachodzi równowaga na wszystkich rynkach, dana alokacja jest osiągalna. Spośród wszystkich osiągalnych alokacji najważniejszymi dla danego modelu są te, które utworzone zostały z optymalnych planów działania wszystkich uczestników rynku przy danym, ustalonym wektorze cen. Jeśli taka alokacja istnieje, mówimy, że ekonomia jest w równowadze, a alokacja ta wraz z wektorem cen tworzy stan ogólnej równowagi konkurencyjnej.

Definicja 4.2. Stanem ogólnej równowagi konkurencyjnej w ekonomii Debreu z pieniądzem E_m nazywamy $(m + n + k + 1)$-elementowy ciąg punktów $s = \left((x_a^*), (y_b^*), (f_r^*), p^*\right)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{\ell+2}$, który spełnia warunki:

1) plan produkcji y_b^* maksymalizuje zysk producenta b na zbiorze Y_b przy wektorze cen p^*, dla każdego $b \in B$,

2) plan finansowy f_r^* maksymalizuje zysk banku r na zbiorze F_r przy wektorze cen p^*, dla każdego $r \in M$,

3) plan konsumpcji x_a^* jest planem najlepszym dla konsumenta a ze względu na relację preferencji $\preccurlyeq_a$ w jego zbiorze budżetowym

$$\beta_a := \{x_a \in X_a : p_m x_a \leq pe(a) + \sum_{b \in B} \theta_{ab} \pi_b(p_m) + \sum_{r \in M} \mu_{ra} \zeta_r(p_m) + s_a + c_a\},$$

dla każdego $a \in A$,

4) alokacja $((x_a^*), (y_b^*), f_r^*)$ spełnia warunek równowagi rynkowej.

Dla potrzeb dalszych rozważań, w szczególności analizy wpływu kredytu konsumpcyjnego na stan ekonomii, na koniec procesu dyfuzji innowacji wprowadzona zostanie możliwość porównywania stanów równowagi ze względu na optymalne działania uczestników rynku.

Definicja 4.3. Stan równowagi $\bar{s} = ((\bar{x}_a^*), (\bar{y}_b^*), (\bar{f}_r^*), \bar{p}^*)$ ekonomii E_m jest lepszy od stanu $s = ((x_a^*), (y_b^*), (f_r^*), p^*)$, w skrócie $s \lhd \bar{s}$, jeżeli:

1) dla każdego $a \in A$ $x_a^* \preccurlyeq_a \bar{x}_a^*$ oraz istnieje $a' \in A$ $x_{a'}^* \prec a' \bar{x}_{a'}^*$,

2) $\sum_{b \in B} \pi_b(p^*) < \sum_{b \in B} \pi_b(\bar{p}^*)$,

3) $\sum_{r \in M} \zeta_r(p^*) \leq \sum_{r \in M} \zeta_r(\bar{p}^*)$.

Zgodnie z wprowadzoną definicją lepszym stanem równowagi jest ten, w którym wszyscy konsumenci realizują plany konsumpcji nie gorsze, a co najmniej jeden z nich realizuje plan lepszy niż optymalne plany konsumpcji w gorszym stanie równowagi, maksymalny zysk całkowity podsystemu produkcji jest większy, natomiast maksymalny zysk całkowity podsystemu finansowego jest nie mniejszy od analogicznych zysków w gorszym stanie równowagi.

5. Analiza procesu dyfuzji innowacji

Analiza procesu dyfuzji innowacji pojawiła się po raz pierwszy w literaturze w końcu XIX w. w pracach francuskiego socjologa G. Tarde [1890], a w latach 60. XX w. została rozwinięta przez E.M. Rogersa [1962]. Zgodnie z tą teorią proces wprowadzania innowacji zostaje zapoczątkowany przez producentów-innowatorów wprowadzających na rynek nowe towary lub nowe technologie, czego efektem jest zaburzenie stanu równowagi (ruchu okrężnego). W kolejnym etapie w zbiorze producentów pojawiają się imitatorzy, którzy powielają plany innowacyjne. Jednocześnie innowacje odniosą sukces, jeśli zmiany innowacyjne zostaną zaakceptowane przez sferę konsumpcji. Zakończenie danego procesu dyfuzji innowacji następuje, gdy dany system ekonomiczny znajdzie się ponownie w stanie równowagi.

Aksjomatyczna analiza dynamicznego procesu dyfuzji innowacji jest możliwa dzięki zastosowaniu matematycznej idei (quasi-)półdynamicznego systemu (por. [Sibirskij i Szube 1987]).

Rozważmy przestrzeń wszystkich ekonomii Debreu z pieniądzem:

$$\boldsymbol{E_m} := \{E_m : E_m \text{ jest ekonomią Debreu z pieniądzem}\}.$$

Definicja 5.1. Odwzorowanie $f_{E_m}: \boldsymbol{E_m} \times \mathbb{R}_+ \to P(\boldsymbol{E_m})$ jest (quasi-)półdynamicznym systemem ekonomii Debreu z pieniądzem, jeżeli:

1) $f_{E_m}(E_m, 0) = \{E_m\}$,

2) $f_{E_m}(f_{E_m}(E_m, t_1), t_2) = f_{E_m}(E_m, t_1 + t_2)\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

Niech dany będzie (quasi-)półdynamiczny system $f_{E_m}: \boldsymbol{E_m} \times \mathbb{R}_+ \to P(\boldsymbol{E_m})$.

Definicja 5.2 (por. [Ciałowicz 2015]).

Zbiór $\tau_+(E_m) := \{f_{E_m}(E_m, t) : t \in \mathbb{R}_+ \text{ i } f_{E_m}(E_m, 0) = E_m\}$ nazywamy półtrajektorią dodatnią (quasi-)półdynamicznej ekonomii Debreu z pieniądzem E_m.

Niech $E_m^t = f_{E_m}(E_m, t)$ oznacza wartość (quasi-)półdynamicznego systemu po czasie t.

Definicja 5.3 (por. [Ciałowicz 2015]). Półtrajektorię dodatnią $\tau_+(E_m)$ nazywamy procesem dyfuzji innowacji w ekonomii Debreu z pieniądzem E_m, jeżeli:

1) $E_m = E_m^0$,

2) istnieją $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takie, że $0 < t_1 < t_2$ i $E_m^0 \subset_i E_m^{t_1} \subset_{K_i}^{P_{im}} E_m^{t_2}$, gdzie $E_m^0 \subset_i E_m^{t_1}$ oznacza rozszerzenie innowacyjne systemu E_m, $E_m^{t_1} \subset_{K_i}^{P_{im}} E_m^{t_2}$ ($E_m^{t_1} \subset_{P_{im}} E_m^{t_2}$ – definicja 2.6 oraz $E_m^{t_1} \subset_{K_i} E_m^{t_2}$ – definicja 3.7),

3) dla systemu $E_m^{t_2}$ istnieje stan równowagi.

6. Rola kredytu konsumpcyjnego w procesie dyfuzji innowacji

Kredyt konsumpcyjny odgrywa ważną rolę w działalności konsumentów, ponieważ zwiększa ich możliwości budżetowe, zapewniając możliwość realizacji planów nieosiągalnych bez tego kredytu. W rezultacie przy niezerowym kredycie zbiór budżetowy danego konsumenta powiększa się, a optymalne plany mogą się polepszyć w sensie relacji preferencji.

Niech dany będzie model ekonomii Debreu z pieniądzem:

$$E_m = (\mathbb{R}^{\ell+2}, P_m, K_m, F, \theta, \varpi_m, \mu).$$

Twierdzenie 6.1. Niech danych będzie dwóch konsumentów $a, a' \in A$ takich, że: 1) $X_a = X_{a'}$, 2) $\preccurlyeq_a = \preccurlyeq_{a'}$, 3) $proj_{\mathbb{R}^\ell}(e_a) = proj_{\mathbb{R}^\ell}(e_a)$, 4) $s_a = s_{a'}$, 5) $c_a \neq 0$, $c_{a'} = 0$, 6) $\theta_{ab} = \theta_{a'b}$ dla każdego $b \in B$, 7) $\mu_{ar} = \mu_{a'r}$ dla każdego $r \in M$, 8) $p_m > \mathbf{0}$, wtedy:

a) $\beta_m(a') \subsetneq \beta_m(a)$ (zbiór budżetowy konsumenta z kredytem niezerowym zawiera w sobie zbiór budżetowy konsumenta bez kredytu),

b) jeżeli $\preccurlyeq_a$ jest monotoniczna, to $x_{a'}^* \prec_a x_a^*$ (plan konsumpcji najlepszy z uwagi na relacje preferencji jest lepszy od najlepszego planu bez kredytu).

Dowód:

a) zgodnie z założeniami (3)–(7) majątki danych konsumentów wynoszą odpowiednio:

$w_a = proj_{\mathbb{R}^\ell}(p_m) \circ proj_{\mathbb{R}^\ell}(e_a) + \sum_{b \in B} \theta_{ab}\pi_b(p_m) + \sum_{r \in M} \mu_{ar}\zeta_r(p_m) + s_a + c_a$,
$w_{a'} = proj_{\mathbb{R}^\ell}(p_m) \circ proj_{\mathbb{R}^\ell}(e_a) + \sum_{b \in B} \theta_{ab}\pi_b(p_m) + \sum_{r \in M} \mu_{ar}\zeta_r(p_m) + s_a$, czyli $w_{a'} < w_a$.

Stąd dla każdego $x_{a'} \in \beta_m(a')$ zachodzi zależność $p_m x_{a'} \leq w_{a'} < w_a$, czyli $x_{a'} \in \beta_m(a)$,

$$\beta_m(a) := \{x_a \in X_a : p_m x_a \leq w_a\},$$

b) zgodnie z definicją monotonicznej relacji preferencji dla każdych dwóch planów konsumpcji x_a, $\tilde{x}_a \in X_a$ jeżeli $x_a < \tilde{x}_a$ (w planie konsumpcji $\tilde{x}_a$ żadnego z towarów nie jest mniej niż w planie konsumpcji x_a, oraz co najmniej jednego towaru jest więcej), to $x_a \prec_a \tilde{x}_a$ (x_a jest planem gorszym od $\tilde{x}_a$). Jednocześnie dla monotonicznej relacji preferencji optymalny plan konsumpcji x_a^* spełnia warunek $p_m x_a^* = w_a$. Podobnie $p_m x_{a'}^* = w_{a'}$.

Jeżeli $\beta_m(a') \subsetneq \beta_m(a)$, to istnieje optymalny plan konsumenta a taki, że $x_a^* \in \beta_m(a)$ i $x_a^* \notin \beta_m(a')$ oraz dla każdego optymalnego planu konsumenta a' zachodzi $p_m x_{a'}^* = w_{a'} < w_a = p_m x_a^*$. Stąd z założenia (8) $p_m > \mathbf{0}$ wynika, że $x_{a'}^* < x_a^*$, a z monotoniczności relacji preferencji wynika, że $x_{a'}^* \prec_a x_a^*$.

Twierdzenie 6.2. Niech dany będzie system ekonomiczny E_m oraz dwa procesy dyfuzji innowacji w postaci półtrajektorii dodatnich $\tau_+(E_m)$ i $\bar{\tau}_+(E_m)$. Jeżeli

1) $E_m^{t_1} = \bar{E}_m^{t_1}$, $F_m^{t_2} = \bar{F}_m^{t_2}$,

2) $\ell^{t_2} = \bar{\ell}^{t_2}$, $A = A^{t_2} = \bar{A}^{t_2}$, $B = B^{t_2} = \bar{B}^{t_2}$, $M = M^{t_2} = \bar{M}^{t_2}$, $p_m^{t_0} = \bar{p}_m^{t_0} = p_m^{t_1} = \bar{p}_m^{t_1} = $ $= p_m^{t_2} = \bar{p}_m^{t_2} > \mathbf{0}$, $\varpi^{t_2} = \bar{\varpi}^{t_2}$,

3) $\forall a \in A\ \forall b \in B : \theta_{ab}^{t_0} = \theta_{ab}^{t_1} = \theta_{ab}^{t_2}$, $\forall a \in A\ \forall r \in M : \mu_{ar}^{t_0} = \mu_{ar}^{t_1} = \mu_{ar}^{t_2}$,

4) $\sum_{\bar{a} \in \bar{A}^{t_2}} \bar{c}_a^{t_2} > 0$ oraz $\forall \bar{a} \in \bar{A}^{t_2} : \bar{c}_a^{t_2} \geq 0$, $\forall a \in A^{t_2} : c_a^{t_2} = 0$,

to $s \lhd \bar{s}$,
gdzie $\bar{s} = ((\bar{x}_a^*), (\bar{y}_b^*), (\bar{f}_r^*), \bar{p}^*)$ jest końcowym stanem równowagi procesu dyfuzji innowacji $\bar{\tau}_+(E_m)$, $s = ((x_a^*), (y_b^*), (f_r^*), p^*)$ jest końcowym stanem równowagi procesu $\tau_+(E_m)$.

Dowód:

Część I. Z założenia (4) wynika, że wśród konsumentów w procesie $\bar{\tau}_+(E_m)$ istnieje taki $\bar{a} \in \bar{A}_i^{t_2}$, dla którego $\bar{c}_a^{t_2} > 0$ (konsument ten ma niezerowy kredyt konsumpcyjny), natomiast w procesie $\tau_+(E_m)$ wszyscy konsumenci mają kredyt konsumpcyjny zerowy. Zgodnie z założeniami (1)–(4) oraz na mocy twierdzenia 6.1 otrzymujemy $x_{\bar{a}}^* < x_{\bar{a}}^*$ oraz $x_{\bar{a}}^* \prec_{\bar{a}} \bar{x}_{\bar{a}}^*$, a jednocześnie dla każdego $a \in A$ $x_a^* \preccurlyeq_a \bar{x}_a^*$, czyli spełniony jest warunek (1) definicji 5.3.

Część II. Ponieważ $\bar{s}$ jest stanem równowagi, to zachodzi dla niego warunek równowagi rynkowej, co w szczególności oznacza, że $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(\bar{x}^{t_2} - \bar{y}^{t_2} + \bar{f}^{t_2}) = $ $= proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}(\bar{\varpi}^{t_2})$, $\sum_{a \in A} \bar{s}_a^{t_2} + \sum_{r \in M} \bar{s}_r^{t_2} = 2\bar{\varpi}_s^{t_2}$, $\sum_{r \in M} \bar{c}_r^{t_2} + \sum_{a \in A} \bar{c}_a^{t_2} + \sum_{b \in B} \bar{c}_b^{t_2} = $ $= 3\bar{\varpi}_c^{t_2}$.

Analogicznie, ponieważ s jest stanem równowagi (w momencie t_2), to zachodzą warunki:

$$proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(x^{t_2} - y^{t_2} + f^{t_2}\right) = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(\varpi^{t_2}\right),$$
$$\sum\nolimits_{r \in M} c_r^{t_2} + \sum\nolimits_{a \in A} c_a^{t_2} + \sum\nolimits_{b \in B} c_b^{t_2} = 3\varpi_c^{t_2}.$$

Z założenia (2) wynika, że $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(\bar{x}^{t_2} - \bar{y}^{t_2} + \bar{f}^{t_2}\right) = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(x^{t_2} - y^{t_2} + f^{t_2}\right)$, jednocześnie z założenia (1) wynika, że $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(\bar{x}^{t_2} - \bar{y}^{t_2}\right) = proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(x^{t_2} - y^{t_2}\right)$, co z uwzględnieniem pierwszej części dowodu $\left(x_{\bar{a}}^{*} < x_{\bar{a}}^{*}\right)$ daje: $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(-\bar{y}^{t_2}\right) \leq$ $\leq proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(-y^{t_2}\right)$, więc $proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(\bar{y}^{t_2}\right) \geq proj_{\mathbb{R}^{\ell_R}}\left(y^{t_2}\right)$.

Analogicznie: $\sum\nolimits_{r \in M} \bar{c}_r^{t_2} + \sum\nolimits_{a \in A} \bar{c}_a^{t_2} + \sum\nolimits_{b \in B} \bar{c}_b^{t_2} = \sum\nolimits_{r \in M} c_r^{t_2} + \sum\nolimits_{b \in B} c_b^{t_2}$, więc na podstawie założenia (1) otrzymujemy: $\sum\nolimits_{a \in A} \bar{c}_a^{t_2} + \sum\nolimits_{b \in B} \bar{c}_b^{t_2} = \sum\nolimits_{b \in B} c_b^{t_2}$. Wynika z tego, że $\sum\nolimits_{b \in B} c_b^{t_2} - \sum\nolimits_{b \in B} \bar{c}_b^{t_2} = \sum\nolimits_{a \in A} \bar{c}_a^{t_2} > 0$, więc $\sum\nolimits_{b \in B} c_b^{t_2} > \sum\nolimits_{b \in B} \bar{c}_b^{t_2}$. W rezultacie $\bar{y}^{t_2} > y^{t_2}$, więc na mocy założenia (2) otrzymujemy: $\sum\nolimits_{b \in B} \pi_b^{t_2}\left(p_m^{t_2}\right) =$ $= y^{t_2} \cdot p_m^{t_2} < \sum\nolimits_{b \in B} \bar{\pi}_b^{t_2}\left(\bar{p}_m^{t_2}\right) = \bar{y}^{t_2} \cdot \bar{p}_m^{t_2}$, czyli spełniony jest warunek (2) definicji 5.3.

Część III. Z założenia (1) wynika, że $\sum\nolimits_{r \in M} \zeta_r^{t_2}\left(p_m^{t_2}\right) = \sum\nolimits_{r \in M} \bar{\zeta}_r^{t_2}\left(\bar{p}_m^{t_2}\right)$, czyli spełniony jest warunek (3) definicji 5.3.

Zgodnie z wykazanym twierdzeniem jeżeli w procesie dyfuzji innowacji w danym systemie ekonomicznym działa konsument z niezerowym kredytem konsumpcyjnym, to osiągnięty stan równowagi będzie lepszy niż w przypadku, gdy żaden z konsumentów nie dysponuje takim kredytem.

7. Podsumowanie

W przedstawionej pracy przeprowadzona została analiza roli kredytu konsumenckiego w procesie dyfuzji innowacji. W szczególności zostało wykazane, że konsumenci dysponujący kredytem mają wpływ na przebieg rozwoju innowacyjnego całego systemu, ponieważ kredyt konsumencki daje możliwość osiągnięcia lepszego (w sensie optymalizacji działalności uczestników rynku) stanu równowagi na koniec procesu dyfuzji innowacji.

Zaproponowane aksjomatyczne ujęcie przedstawionego problemu stanowi punkt wyjścia do rozwinięcia badań nad wpływem zachowania konsumentów oraz działalności banków na rozwój innowacyjny całego systemu, a w szczególności badanie wzajemnego oddziaływania sfery produkcji, sfery konsumpcji oraz sfery finansowej w procesie dyfuzji innowacji.

Literatura

Andersen E.S. [2007], *Innovation and Demand* [w:] *Elgar Companion to Neo-Schumpeterian Economics*, red. H. Hanusch, A. Pyka, Edward Elgar, Cheltenham–Northampton.
Ciałowicz B., Malawski A. [2010], *Demand-driven Schumpeterian Innovative Evolution*, The 13th International Schumpeter Society Conference, Aalborg, Denmark.
Ciałowicz B., Malawski A. [2011], *The Role of Banks in the Schumpeterian Innovative Evolution – An Axiomatic Set-up* [w:] *Catching up, Spillovers and Innovation Networks in a Schumpeterian Perspective*, red. A. Pyka, M. da Graça Derengowski Fonseca, Springer, Berlin–Heidelberg–New York.
Ciałowicz B., Malawski A. [2012], *The Role of Households in the Schumpeterian Innovative Evolution – An Axiomatic Set-up*, The 14th International Schumpeter Society Conference, University of Queensland, Brisbane, Australia.
Ciałowicz B., Malawski A. [2013], *Demand-driven Schumpeterian Innovative Evolution* [w:] *Innovative Economy as the Object of Investigation in Theoretical Economics*, red. A. Malawski, Cracow University of Economics Press, Cracow.
Ciałowicz B., Malawski A. [2014], *The Logic of Imitative Processes: Imitation as Secondary Innovation – An Axiomatic Schumpeterian Analysis*, The 15th International Schumpeter Society Conference (ISS), Friedrich Schiller University, Jena, Germany.
Ciałowicz B. [2014], *Rola imitacji w schumpeterowskiej ewolucji innowacyjnej – ujęcie aksjomatyczne* [w:] *Statystycy, ekonometrycy i matematycy Polski Południowej dla rozwoju badań społeczno-ekonomicznych*, red. J. Pociecha, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
Ciałowicz, B. [2015], *Analysis of Consumer Innovativeness in an Axiomatic Approach*, 51 Jubileuszowa Konferencja Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Polski Południowej, Wojanów, Polska.
Ciałowicz B. [2016], *Innowacyjność konsumentów w procesie dyfuzji innowacji – ujęcie aksjomatyczne* [w:] *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
Clark R.A., Goldsmith R.E. [2006], *Interpersonal Influence and Consumer Innovativeness*, „International Journal of Consumer Studies", vol. 30, nr 1, http://doi.org/10.1111/j.1470.6431.2005.00435.x.
Debreu G. [1959], *Theory of Value*, Viley, New York.
Hanusch H., Pyka A. [2007a], *A Roadmap to Comprehensive Neo-Schumpeterian Economics* [w:] *Elgar Companion to Neo-Schumpeterian Economics*, red. H. Hanusch, A. Pyka, Edward Elgar, Cheltenham–Northampton.
Hanusch H., Pyka, A. [2007b], *Principles of Neo-Schumpeterian Economics*, „Cambridge Journal of Economics", vol. 31, nr 2, https://doi.org/10.1093/cje/bel018.
Malawski A. [1999], *Metoda aksjomatyczna w ekonomii*, Ossolineum, Wrocław.
Malawski A. [2005], *A Dynamical System Approach to the Arrow-Debreu Theory of General Equilibrium* [w:] *The 9th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, International Institute of Informatics and Systemics, Orlando, Florida.
Malawski A., Woerter M. [2006], *Diversity Structure of the Schumpeterian Evolution. An Axiomatic Approach*, Arbeitspapiere/Working Papers of the Swiss Institute for Business Cycle Research, nr 153, KOF, Zürich.

McMeekin A., Tomlinson M., Green K., Walsh V. [2002], *Innovation by Demand: An Interdisciplinary Approach to the Study of Demand and Its Role in Innovation*, Manchester University Press, Manchester–New York.
Nelson R.R., Winter S.G. [1982], *An Evolutionary Theory of Economic Change*, Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge.
Rogers E.M. [1962], *Diffusion of Innovations*, The Free Press, New York.
Saam N.J. [2005], *The Role of Consumers in Innovation Processes in Markets*, „Rationality and Society", vol. 17, nr 3, https://doi.org/10.1177/1043463105055465.
Schumpeter J.A. [1912], *Die Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung*, Duncker & Humblot, Leipzig.
Sibirskij K.S., Szube A.S. [1987], *Semidynamical Systems* (*Topological Theory*), Sztinca, Kiszyniów.
Tarde G. [1890], *Les lois de l'imitation. Psychologie économique*, tome premier, red. F. Alcan, Bibliothèque de philosophie contemporaine, Ancienne Librairie Germer Baillière et Cie, Paris.

An Analysis of the Role Consumer Loans Play in the Diffusion of Innovation – an Axiomatic Approach

(Abstract)

The paper's aim is to formally analyse the role consumer loans play in the process of diffusing innovation. To that end, the following tools are employed: a set-theoretical and topological apparatus borrowed from general equilibrium theory and a static model of the Debreu economy with money in the form of a multi-range relational system. Specific extensions are defined for this model with respect to innovative changes in a consumption sphere or imitative changes in the production sphere. A formal definition of the diffusion of innovation is then introduced and analysis of the role of consumer loans in this process is presented. Finally, it is shown that consumer loans may improve the process' ultimate equilibrium.

Keywords: consumer loans, the process of diffusing innovation, Debreu monetary economy, Schumpeterian innovative evolution, axiomatic analysis.